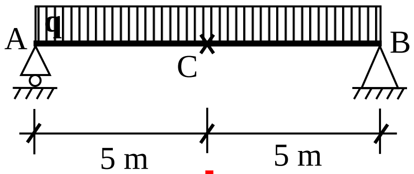
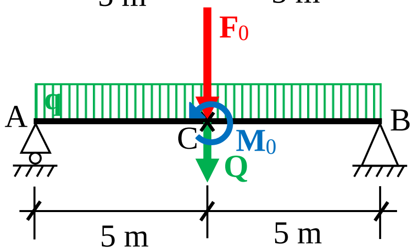
Határozzuk meg az alábbi kéttámaszú tartó C keresztmetszetének lehajlását és szögelfordulását, ha **q** = 3 kN/m!



A megoldáshoz a Castigliano-tételt fogjuk használni. Ennek alkalmazásakor azonban a C pontbeli koncentrált erő, illetve koncentrált forgatónyomaték szerint kell majd parciálisan deriválnunk. Mivel ott ilyenek nincsenek, ezért hozzáadunk a C keresztmetszetben a rendszerhez egy $\mathbf{F}_0$ segéderőt és egy $\mathbf{M}_0$ segédnyomatékot, melyeket az utolsó lépésben fogunk nullává tenni.

Mivel a hajlítónyomaték additív mennyiség, ezért külön-külön meghatározva a **q** megoszló erőrendszer, az $\mathbf{F}_0$ koncentrált erő és az $\mathbf{M}_0$ koncentrált forgatónyomaték hajlítónyomatéki függvényét, ezek összege fogja adni a teljes szerkezet $\mathbf{M}(x)$ függvényét.



Először határozzuk meg az A és a B keresztmetszetbeli reakcióerőket a nyomatéki tétel segítségével! Mivel a szerkezet egyensúlyban van, ezért minden pontjában az össz-forgatónyomaték nulla.

Tekintsük először úgy a rendszert, mintha csak a **q** megoszló erőrendszer hatna a tartóra. A **q** egyenletes megoszló erőrendszer helyettesíthető a középpontjában egy **Q** = 30 kN-os erővel.

$$M_A = 0 = -5 \cdot Q + 10 \cdot F_B = -5 \cdot 30 + 10 \cdot F_B$$

$$10 F_B = 150\,\text{kN}$$

$$F_B = 15\,\text{kN}$$

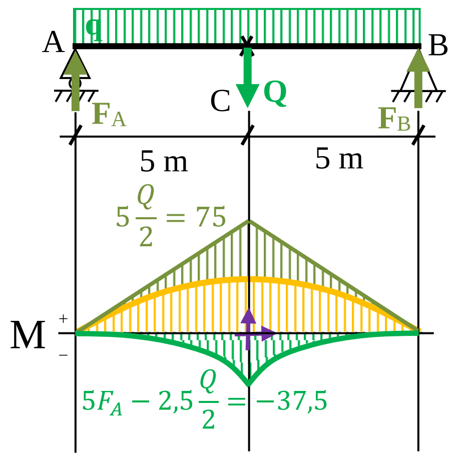
Mivel a függőleges irányú erők összege **0**, ezért

$$F_A + F_B = Q = 30\,\text{kN}$$

$$F_A = 15\,\text{kN}$$

Ezt megkaphatjuk a B keresztmetszetre felírt nyomatéki tétel segítségével is:

$$M_B = 0 = 5 \cdot Q - 10 \cdot F_A = 5 \cdot 30 - 10 \cdot F_A$$



A hajlítónyomaték a megoszló erőrendszer negatív és a kényszereken ható (koncentrált) reakcióerők pozitív hajlítónyomatékának összege. A megoszló erőrendszerből származó hajlítónyomaték-járulék maximumát a C keresztmetszetnél veszi fel, értéke itt

$$M_{h,C,q} = F_A \cdot \frac{5}{2} = F_B \cdot \frac{5}{2} = \frac{75}{2}\ \text{kNm},$$

a koncentrált reakcióerőkből származó hajlítónyomaték-járulék szintén a C keresztmetszetnél maximális, értéke.

$$M_{h,C,F} = 5 \cdot F_A = 5 \cdot F_B = 75\ \text{kNm}.$$

Egy koordinátarendszert felvéve a megoszló erőrendszerből származó és a koncentrált reakcióerőkből származó hajlítónyomaték-járulék függvény balról számolva:

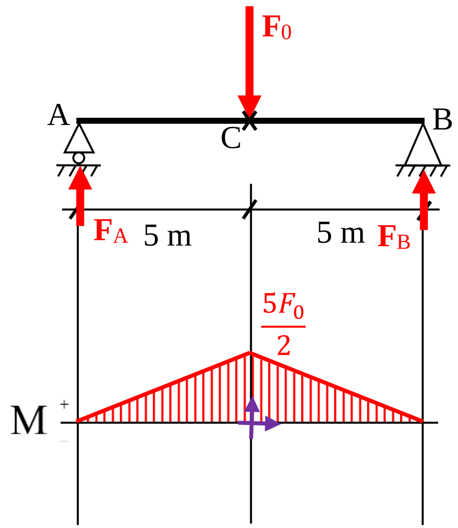
$$M_q(x) + M_{FA}(x) = -(x+5)q\,\frac{x+5}{2} + (x+5)F_A = \frac{-(x^2+10x+25)q}{2} + (x+5)F_A = -\frac{3}{2}x^2 + 37{,}5$$

alakú.

Tekintsük most úgy a rendszert, mintha csak az $\mathbf{F}_0$ koncentrált erő hatna a tartóra. Ekkor a nyomatéki tétel segítségével a kényszereken fellépő reakcióerők:

$$M_A = 0 = -5 \cdot F_0 + 10 \cdot F_B$$

$$F_B = \frac{F_0}{2}$$



Mivel a függőleges irányú erők összege 0, ezért

$$F_A + F_B = F_0$$

$$F_A = \frac{F_0}{2}$$

Ezt megkaphatjuk a B keresztmetszetre felírt nyomatéki tétel segítségével is:

$$M_B = 0 = 5 \cdot F_0 - 10 \cdot F_A$$

Ennek segítségével a C keresztmetszetbeli hajlítónyomaték (akár jobbról, akár balról számolva):

$$M_{h,C} = +5 \cdot F_A = +5 \cdot F_B = 5\frac{F_0}{2}$$

A hajlítónyomatéki ábra lineáris (a tartó két szabad végénél nulla értékkel), hiszen koncentrált erőről van szó.

Mivel az $M(x)$ függvénynek törése van a C keresztmetszetnél, a két szakasz egyenletét külön-külön kell meghatározni. Jelöljük a bal oldali, A ponthoz közelebbi részt $M_1(x)$-szel, a jobb oldali, B ponthoz közelebbi részt $M_2(x)$-szel. Ugyanazt a koordinátarendszert felvéve a két egyenes egyenlete

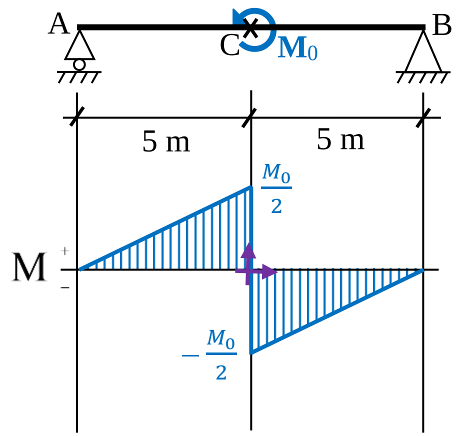
$$M_1(x) = (x+5)\frac{F_0}{2}$$

$$M_2(x) = -(x-5)\frac{F_0}{2}$$

Végül tekintsük úgy a rendszert, mintha csak az $\mathbf{M}_0$ koncentrált hajlítónyomaték hatna a tartóra. Ekkor a nyomatéki tétel segítségével a kényszereken fellépő reakcióerők:

$$M_A = 0 = M_0 + 10 \cdot F_B$$

$$F_B = -\frac{M_0}{10}$$



Mivel a függőleges irányú erők összege 0, ezért

$$F_A + F_B = 0$$

$$F_A = \frac{M_0}{10}$$

Ezt megkaphatjuk a B keresztmetszetre felírt nyomatéki tétel segítségével is:

$$M_B = 0 = M_0 - 10 \cdot F_A$$

Ennek segítségével a C keresztmetszetbeli hajlítónyomaték balról számolva:

$$M_{h,C,\leftarrow} = +5 \cdot F_A = 5\frac{M_0}{10} = \frac{M_0}{2}$$

A C keresztmetszetbeli hajlítónyomaték jobbról számolva:

$$M_{h,C,\rightarrow} = +5 \cdot F_B = 5\left(-\frac{M_0}{10}\right) = -\frac{M_0}{2}$$

A hajlítónyomatéki ábra lineáris. Ismét az eddig használt koordinátarendszert felvéve a két egyenes egyenlete

$$M_1(x) = (x+5)\frac{M_0}{10}$$

$$M_2(x) = (x-5)\frac{M_0}{10}$$

Mindezek alapján a három hajlítónyomaték-komponens összege külön az 1-es és külön a 2-es szakaszra:

$$M_1(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{75}{2} + (x+5)\frac{F_0}{2} + (x+5)\frac{M_0}{2} = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{75}{2} + \frac{F_0 x}{2} + \frac{5F_0}{2} + \frac{M_0 x}{10} + \frac{M_0}{2}$$

$$M_2(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{75}{2} - (x-5)\frac{F_0}{2} + (x-5)\frac{M_0}{2} = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{75}{2} - \frac{F_0 x}{2} + \frac{5F_0}{2} + \frac{M_0 x}{10} - \frac{M_0}{2}$$

Az $M_1^2(x)$ függvény kiszámítása: minden komponens négyzete plusz az egyes tagok páronként vett szorzatainak kétszerese:

$$M_1^2(x) = \frac{9x^4}{4} + \frac{5625}{4} + \frac{F_0^2 x^2}{4} + \frac{25F_0^2}{4} + \frac{M_0^2 x^2}{100} + \frac{M_0^2}{4} + 2\cdot\left(-\frac{3}{2}x^2\right)\cdot\frac{75}{2} + 2\cdot\left(-\frac{3}{2}x^2\right)\cdot\frac{F_0 x}{2} + 2\cdot\left(-\frac{3}{2}x^2\right)\cdot\frac{5F_0}{2} + 2\cdot\left(-\frac{3}{2}x^2\right)\cdot\frac{M_0 x}{10} + 2\cdot\left(-\frac{3}{2}x^2\right)\cdot\frac{M_0}{2} +$$

$$+ 2\cdot\frac{75}{2}\cdot\frac{F_0 x}{2} + 2\cdot\frac{75}{2}\cdot\frac{5F_0}{2} + 2\cdot\frac{75}{2}\cdot\frac{M_0 x}{10} + 2\cdot\frac{75}{2}\cdot\frac{M_0}{2} + 2\cdot\frac{F_0 x}{2}\cdot\frac{5F_0}{2} + 2\cdot\frac{F_0 x}{2}\cdot\frac{M_0 x}{10} + 2\cdot\frac{F_0 x}{2}\cdot\frac{M_0}{2} + 2\cdot\frac{5F_0}{2}\cdot\frac{M_0 x}{10} + 2\cdot\frac{5F_0}{2}\cdot\frac{M_0}{2} + 2\cdot\frac{M_0 x}{10}\cdot\frac{M_0}{2} =$$

$$= \frac{9x^4}{4} + \frac{5625}{4} + \frac{F_0^2 x^2}{4} + \frac{25F_0^2}{4} + \frac{M_0^2 x^2}{100} + \frac{M_0^2}{4} - \frac{225x^2}{2} - \frac{3F_0 x^3}{2} - \frac{15F_0 x^2}{2} - \frac{3M_0 x^3}{10} - \frac{3M_0 x^2}{2} +$$

$$+ \frac{75F_0 x}{2} + \frac{375F_0}{2} + \frac{15M_0 x}{2} + \frac{75M_0}{2} + \frac{5F_0^2 x}{2} + \frac{F_0 M_0 x^2}{10} + \frac{F_0 M_0 x}{2} + \frac{F_0 M_0 x}{2} + \frac{5F_0 M_0}{2} + \frac{M_0^2 x}{10}$$

A W_1 belső munkát az $M_1^2(x)$ függvény alatti területként kapjuk, azaz a tartó bal széle és a C keresztmetszet közötti határozott integrálját kell kiszámítanunk (egy $1/2IE$ prefaktorral beszorozva, melyről feltesszük, hogy ismerjük):

$$W_1 = \frac{1}{2IE}\int_{-5}^{0} M_1^2(x)\,dx = \frac{1}{2IE}\Big[\frac{9x^5}{20} + \frac{5625}{4}x + \frac{F_0^2 x^3}{12} + \frac{25F_0^2 x}{4} + \frac{M_0^2 x^3}{300} + \frac{M_0^2 x}{4} - \frac{75x^3}{2} - \frac{3F_0 x^4}{8} - \frac{5F_0 x^3}{2} - \frac{3M_0 x^4}{40} - \frac{M_0 x^3}{2} +$$

$$+ \frac{75F_0 x^2}{4} + \frac{375F_0 x}{2} + \frac{15M_0 x^2}{4} + \frac{75M_0 x}{2} + \frac{5F_0^2 x^2}{4} + \frac{F_0 M_0 x^3}{30} + \frac{F_0 M_0 x^2}{4} + \frac{F_0 M_0 x^2}{4} + \frac{5F_0 M_0 x}{2} + \frac{M_0^2 x^2}{20}\Big]_{-5}^{0} =$$

$$= \frac{1}{2IE}(0) - \frac{1}{2IE}\Big(-\frac{5625}{4} - \frac{28125}{4} - \frac{125F_0^2}{12} - \frac{125F_0^2}{4} - \frac{5M_0^2}{12} - \frac{5M_0^2}{4} + \frac{9375}{2} - \frac{1875F_0}{8} + \frac{625F_0}{2} - \frac{375M_0}{8} + \frac{125M_0}{2} +$$

$$+ \frac{1875F_0}{4} - \frac{1875F_0}{2} + \frac{375M_0}{4} - \frac{375M_0}{2} + \frac{125F_0^2}{4} - \frac{25F_0 M_0}{6} + \frac{25F_0 M_0}{4} + \frac{25F_0 M_0}{4} - \frac{25F_0 M_0}{2} + \frac{5M_0^2}{4}\Big) =$$

$$= \frac{1}{2IE}\Big(\frac{5625}{4} + \frac{28125}{4} + \frac{125F_0^2}{12} + \frac{125F_0^2}{4} + \frac{5M_0^2}{12} + \frac{5M_0^2}{4} - \frac{9375}{2} + \frac{1875F_0}{8} - \frac{625F_0}{2} + \frac{375M_0}{8} - \frac{125M_0}{2} -$$

$$- \frac{1875F_0}{4} + \frac{1875F_0}{2} - \frac{375M_0}{4} + \frac{375M_0}{2} - \frac{125F_0^2}{4} + \frac{25F_0 M_0}{6} - \frac{25F_0 M_0}{4} - \frac{25F_0 M_0}{4} + \frac{25F_0 M_0}{2} - \frac{5M_0^2}{4}\Big)$$

A Castigliano-tételek alapján a kérdéses keresztmetszet (jelen esetben a „C”) lehajlása a W_1 belső munkának az adott keresztmetszetben ható koncentrált erő (jelen esetben a F_0) szerinti parciális deriváltja. Mivel $\mathbf{F}_0$ és $\mathbf{M}_0$ az eredeti feladatban nem szerepelt, csak mi adtuk hozzá a rendszerhez ezen deriválás elvégezhetőségének érdekében, ezért a deriválás után ezek helyére nullát helyettesítünk.

$$f_1 = \left.\frac{\partial W_1}{\partial F_0}\right|_{\substack{F_0=0\\M_0=0}} = \frac{1}{2IE}\left.\left(\frac{125F_0}{6} + \frac{125F_0}{2} + \frac{1875}{8} - \frac{625}{2} - \frac{1875}{4} + \frac{1875}{2} - \frac{125F_0}{2} + \frac{25M_0}{6} - \frac{25M_0}{4} - \frac{25M_0}{4} + \frac{25M_0}{2}\right)\right|_{\substack{F_0=0\\M_0=0}} =$$

$$= \frac{1}{2IE}\left(\frac{1875}{8} - \frac{625}{2} - \frac{1875}{4} + \frac{1875}{2}\right) = \frac{1}{2IE}\frac{3125}{8}$$

$$\varphi_1 = \left.\frac{\partial W_1}{\partial M_0}\right|_{\substack{F_0=0\\M_0=0}} = \frac{1}{2IE}\left.\left(\frac{5M_0}{6} + \frac{5M_0}{2} + \frac{375}{8} - \frac{125}{2} - \frac{375}{4} + \frac{375}{2} + \frac{25F_0}{6} - \frac{25F_0}{4} - \frac{25F_0}{4} + \frac{25F_0}{2} - \frac{5M_0}{2}\right)\right|_{\substack{F_0=0\\M_0=0}} = \frac{1}{2IE}\left(\frac{375}{8} - \frac{125}{2} - \frac{375}{4} + \frac{375}{2}\right) = \frac{1}{2IE}\frac{625}{8}$$

Hasonlóan végigszámolva a másik tartórészre:

$$M_2(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{75}{2} - \frac{F_0 x}{2} + \frac{5F_0}{2} + \frac{M_0 x}{10} - \frac{M_0}{2}$$

$$M_2^2(x) = \frac{9x^4}{4} + \frac{5625}{4} + \frac{F_0^2 x^2}{4} + \frac{25F_0^2}{4} + \frac{M_0^2 x^2}{100} + \frac{M_0^2}{4} + 2\cdot\left(-\frac{3}{2}x^2\right)\cdot\frac{75}{2} + 2\cdot\left(-\frac{3}{2}x^2\right)\cdot\left(-\frac{F_0 x}{2}\right) + 2\cdot\left(-\frac{3}{2}x^2\right)\cdot\frac{5F_0}{2} + 2\cdot\left(-\frac{3}{2}x^2\right)\cdot\frac{M_0 x}{10} + 2\cdot\left(-\frac{3}{2}x^2\right)\cdot\left(-\frac{M_0}{2}\right) +$$
$$+ 2\cdot\frac{75}{2}\cdot\left(-\frac{F_0 x}{2}\right) + 2\cdot\frac{75}{2}\cdot\frac{5F_0}{2} + 2\cdot\frac{75}{2}\cdot\frac{M_0 x}{10} + 2\cdot\frac{75}{2}\cdot\left(-\frac{M_0}{2}\right) + 2\cdot\left(-\frac{F_0 x}{2}\right)\cdot\frac{5F_0}{2} + 2\cdot\left(-\frac{F_0 x}{2}\right)\cdot\frac{M_0 x}{10} + 2\cdot\left(-\frac{F_0 x}{2}\right)\cdot\left(-\frac{M_0}{2}\right) + 2\cdot\frac{5F_0}{2}\cdot\frac{M_0 x}{10} + 2\cdot\frac{5F_0}{2}\cdot\left(-\frac{M_0}{2}\right) + 2\cdot\frac{M_0 x}{10}\cdot\left(-\frac{M_0}{2}\right) =$$
$$= \frac{9x^4}{4} + \frac{5625}{4} + \frac{F_0^2 x^2}{4} + \frac{25F_0^2}{4} + \frac{M_0^2 x^2}{100} + \frac{M_0^2}{4} - \frac{225x^2}{2} + \frac{3F_0 x^3}{2} - \frac{15F_0 x^2}{2} - \frac{3M_0 x^3}{10} + \frac{3M_0 x^2}{2} -$$
$$- \frac{75F_0 x}{2} + \frac{375F_0}{2} + \frac{15M_0 x}{2} - \frac{75M_0}{2} - \frac{5F_0^2 x}{2} - \frac{F_0 M_0 x^2}{10} + \frac{F_0 M_0 x}{2} + \frac{F_0 M_0 x}{2} - \frac{5F_0 M_0}{2} - \frac{M_0^2 x}{10}$$

$$W_2 = \frac{1}{2IE}\int_0^5 M_2^2(x)\,dx = \frac{1}{2IE}\left[\frac{9x^5}{20} + \frac{5625}{4}x + \frac{F_0^2 x^3}{12} + \frac{25F_0^2 x}{4} + \frac{M_0^2 x^3}{300} + \frac{M_0^2 x}{4} - \frac{75x^3}{2} + \frac{3F_0 x^4}{8} - \frac{5F_0 x^3}{2} - \frac{3M_0 x^4}{40} + \frac{M_0 x^3}{2} -\right.$$
$$\left. - \frac{75F_0 x^2}{4} + \frac{375F_0 x}{2} + \frac{15M_0 x^2}{4} - \frac{75M_0 x}{2} - \frac{5F_0^2 x^2}{4} - \frac{F_0 M_0 x^3}{30} + \frac{F_0 M_0 x^2}{4} + \frac{F_0 M_0 x^2}{4} - \frac{5F_0 M_0 x}{2} - \frac{M_0^2 x^2}{20}\right]_0^5 =$$

$$= \frac{1}{2IE}\left(\frac{5625}{4} + \frac{28125}{4} + \frac{125F_0^2}{12} + \frac{125F_0^2}{4} + \frac{5M_0^2}{12} + \frac{5M_0^2}{4} - \frac{9375}{2} + \frac{1875F_0}{8} - \frac{625F_0}{2} - \frac{375M_0}{8} + \frac{125M_0}{2} -\right.$$
$$\left. - \frac{1875F_0}{4} + \frac{1875F_0}{2} + \frac{375M_0}{4} - \frac{375M_0}{2} - \frac{125F_0^2}{4} - \frac{25F_0 M_0}{6} + \frac{25F_0 M_0}{4} + \frac{25F_0 M_0}{4} - \frac{25F_0 M_0}{2} - \frac{5M_0^2}{4}\right) - \frac{1}{2IE}(0) =$$

$$f_2 = \left.\frac{\partial W_2}{\partial F_0}\right|_{\substack{F_0=0\\M_0=0}} = \frac{1}{2IE}\left.\left(\frac{125F_0}{6} + \frac{125F_0}{2} + \frac{1875}{8} - \frac{625}{2} - \frac{1875}{4} + \frac{1875}{2} - \frac{125F_0}{2} + \frac{25M_0}{6} + \frac{25M_0}{4} + \frac{25M_0}{4} - \frac{25M_0}{2}\right)\right|_{\substack{F_0=0\\M_0=0}} =$$
$$= \frac{1}{2IE}\left(\frac{1875}{8} - \frac{625}{2} - \frac{1875}{4} + \frac{1875}{2}\right) = \frac{1}{2IE}\frac{3125}{8}$$

$$\varphi_2 = \left.\frac{\partial W_2}{\partial M_0}\right|_{\substack{F_0=0\\M_0=0}} = \frac{1}{2IE}\left.\left(\frac{5M_0}{6} + \frac{5M_0}{2} - \frac{375}{8} + \frac{125}{2} + \frac{375}{4} - \frac{375}{2} - \frac{25F_0}{6} + \frac{25F_0}{4} + \frac{25F_0}{4} - \frac{25F_0}{2} - \frac{5M_0}{2}\right)\right|_{\substack{F_0=0\\M_0=0}} = \frac{1}{2IE}\left(-\frac{375}{8} + \frac{125}{2} + \frac{375}{4} - \frac{375}{2}\right) = -\frac{1}{2IE}\frac{625}{8}$$

A C keresztmetszet lehajlását és szögelfordulását a két fél tartóból számolt f és φ értékek összegeként kapjuk:

$$f = f_1 + f_2 = \frac{1}{2IE}\frac{3125}{8} + \frac{1}{2IE}\frac{3125}{8} = \frac{3125}{8IE}$$

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{625}{8IE} - \frac{625}{8IE} = 0$$

Nem meglepő, hogy $f_1 = f_2$, hiszen a C keresztmetszet pont a tartó szimmetriatengelyében helyezkedik el, ezért a két oldalnak ugyanakkora járulékot kell adnia a lehajlásához. Szintén érthető, hogy a $\varphi_1 = -\varphi_2$ eredménynek kellett kijönnie: a tartó középső, szimmetriatengelyére eső keresztmetszetére ki kell jönnie, hogy $\varphi = 0$, hiszen ez az a keresztmetszet, melyről intuitíven is látjuk, hogy az egyenletesen megoszló terhelés hatására vízszintes lesz, nem fordul el, csak lehajlik.