1. Invertálja az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ mátrixot!

$\det\mathbf{A} = |\mathbf{A}| = (3\cdot4\cdot1) - (3\cdot2\cdot3) + (2\cdot2\cdot2) - (2\cdot2\cdot1) + (1\cdot2\cdot3) - (1\cdot4\cdot2) = -4 \neq 0 \Rightarrow$ Az inverz létezik.

1. módszer: az adjungált segítségével

$$\operatorname{adj}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -5 \\ 0 & -4 & 8 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -4 \\ -2 & -5 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\operatorname{adj}\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = \begin{bmatrix} \frac12 & -\frac14 & 0 \\ -\frac12 & -\frac14 & 1 \\ \frac12 & \frac54 & -2 \end{bmatrix}$$

2. módszer: elemi lépésekkel

$$\left[\begin{matrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right] \quad +\ -\tfrac23\cdot \quad +\ -\tfrac23\cdot$$

$$\left[\begin{matrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & \frac83 & \frac43 \\ 0 & \frac53 & \frac13 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac23 & 1 & 0 \\ -\frac23 & 0 & 1 \end{matrix}\right] \quad +\ -\tfrac34\cdot \quad +\ -\tfrac58\cdot$$

$$\left[\begin{matrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac83 & \frac43 \\ 0 & 0 & -\frac12 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} \frac32 & -\frac34 & 0 \\ -\frac23 & 1 & 0 \\ -\frac14 & -\frac58 & 1 \end{matrix}\right] \quad +\ \tfrac83\cdot$$

$$\left[\begin{matrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac83 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac12 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} \frac32 & -\frac34 & 0 \\ -\frac43 & -\frac23 & \frac83 \\ -\frac14 & -\frac58 & 1 \end{matrix}\right] \begin{matrix} \cdot\frac13 \\ \cdot\frac38 \\ \cdot(-2) \end{matrix}$$

$$\left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} \frac12 & -\frac14 & 0 \\ -\frac12 & -\frac14 & 1 \\ \frac12 & \frac54 & -2 \end{matrix}\right]$$

3. módszer: elemi bázistranszformációval

$$\begin{array}{c|ccc} & \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{b}_1 & \boxed{3} & 2 & 1 \\ \mathbf{b}_2 & 2 & 4 & 2 \\ \mathbf{b}_3 & 2 & 3 & 1 \end{array} \Bigg\| \begin{array}{c|ccc} & \mathbf{b}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{v}_1 & \frac13 & \frac23 & \frac13 \\ \mathbf{b}_2 & -\frac23 & 4-\frac{2\cdot2}{3} & 2-\frac{1\cdot2}{3} \\ \mathbf{b}_3 & -\frac23 & 3-\frac{2\cdot2}{3} & 1-\frac{1\cdot2}{3} \end{array} \Bigg\| \begin{array}{c|ccc} & \mathbf{b}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{v}_1 & \frac13 & \frac23 & \frac13 \\ \mathbf{b}_2 & -\frac23 & \boxed{\frac83} & \frac43 \\ \mathbf{b}_3 & -\frac23 & \frac53 & \frac13 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc} & \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{v}_1 & \frac13-\frac{-\frac23\frac23}{\frac83} & -\frac{\frac23}{\frac83} & \frac13-\frac{\frac23\frac43}{\frac83} \\ \mathbf{v}_2 & \frac{-\frac23}{\frac83}=-\frac14 & \frac{1}{\frac83} & \frac{\frac43}{\frac83}=\frac12 \\ \mathbf{b}_3 & -\frac23-\frac{-\frac23\frac53}{\frac83} & -\frac{\frac53}{\frac83} & \frac13-\frac{\frac43\frac53}{\frac83} \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc} & \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{v}_1 & \frac12 & -\frac14 & 0 \\ \mathbf{v}_2 & -\frac14 & \frac38 & \frac12 \\ \mathbf{b}_3 & -\frac14 & -\frac58 & \boxed{-\frac12} \end{array} \Bigg\| \begin{array}{c|ccc} & \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{v}_1 & \frac12-\frac{-\frac14\cdot0}{-\frac12} & -\frac14-\frac{-\frac58\cdot0}{-\frac12} & -\frac{0}{-\frac12} \\ \mathbf{v}_2 & -\frac14-\frac{-\frac14\frac12}{-\frac12} & \frac38-\frac{-\frac58\frac12}{-\frac12} & -\frac{\frac12}{-\frac12} \\ \mathbf{v}_3 & \frac{-\frac14}{-\frac12}=\frac12 & \frac{-\frac58}{-\frac12}=\frac54 & \frac{1}{-\frac12} \end{array} \Bigg\| \begin{array}{c|ccc} & \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{v}_1 & \frac12 & -\frac14 & 0 \\ \mathbf{v}_2 & -\frac12 & -\frac14 & 1 \\ \mathbf{v}_3 & \frac12 & \frac54 & -2 \end{array}$$

2. Diagonalizálja a $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & -8 & -12 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ mátrixot!

$$\det(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -8 & -12 \\ 1 & 4-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)\,(4-\lambda)\,(1-\lambda) - (-8)\cdot 1\cdot(1-\lambda) =$$

$$= (1-\lambda)\,[\,(-2-\lambda)\,(4-\lambda) + 8\,] =$$

$$= (1-\lambda)\,(\lambda^2 - 2\lambda) = (1-\lambda)\cdot\lambda\cdot(\lambda-2) \overset{!}{=} 0$$

$\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 0$; $\lambda_3 = 2$ $\qquad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

3. Egy szendvicsgyár kétféle szendvicset készít, sajtosat és sonkásat. A sajtos szendvicsnél 1 szelet kenyérre két szelet sonka és két szelet sajt kerül. A sima sonkásnál két szelet kenyér közé kerül két szelet sonka. A hűtőkamrában 800 szelet kenyér, 1200 szelet sonka és 600 szelet sajt van. Egy sajtos szendvicsen 60 Ft haszon van, egy sonkáson 80 Ft. Melyik szendvicsből mennyit gyártsanak, hogy a profit maximális legyen, és mennyi ez forintban?

	SAJTOS	SONKÁS	
kenyér	1	2	800
sonka	2	2	1200
sajt	$\boxed{2}$	0	600
– profit	60	80	0

szűk keresztmetszet:
□ 800/1=800, 1200/2=600, 600/2=**300**
△ 800/2=**400**, 1200/2=600

□

	sajt	SONKÁS	
kenyér	- ½	$\boxed{2}$	500
sonka	-1	2	600
SAJTOS	½	0	300
– profit	-30	80	-18000

↳ szűk keresztmetszet:
□ 500/2=250, 600/2=**300**

	sajt	kenyér	
SONKÁS	- ¼	½	250
sonka	- ½	-1	100
SAJTOS	½	0	300
– profit	-10	- 40	**- 38000**

△

	SAJTOS	kenyér	
SONKÁS	½	½	400
sonka	1	-1	400
sajt	2	0	600
– profit	20	- 40	- 32000

↳ szűk keresztmetszet:
□ 400/0,5=800, 400/1=400, 600/2=**300**

	sajt	kenyér	
SONKÁS	- ¼	½	250
sonka	- ½	-1	100
SAJTOS	½	0	300
– profit	-10	- 40	**- 38000**

250 sonkás és 300 sajtos szendvicset gyártva maximális a profit: 38 000 Ft.

4. Rajzolja fel az 5 csúcsú teljes gráf összes Hamilton-körét!