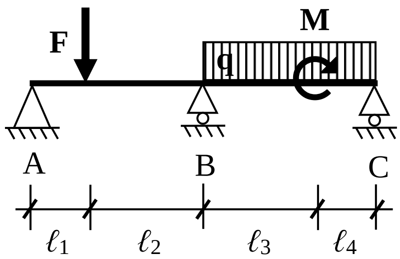
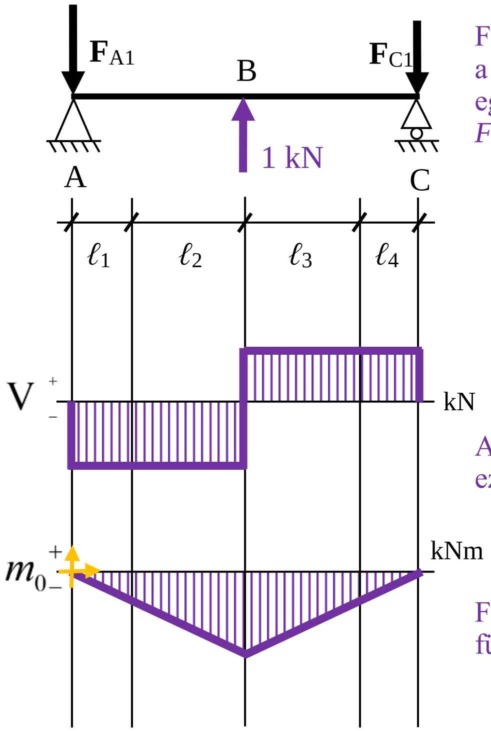
Legyen adott egy, az alábbi ábrán látható terhelésű tartó: $F = 2$ kN, $q = 3$ kN/m, $M = 4$ kNm, $\ell_1 = 1$ m, $\ell_2 = 3$ m, $\ell_3 = 4$ m, $\ell_4 = 2$ m.



A törzstartót egy szabadsági fokot lekötő kényszer, azaz az egyik görgő elhagyásával kapjuk. Válasszuk a B keresztmetszetnél található görgőt. Ezt egy 1 kN-os erővel helyettesítve megoldjuk a kapott kéttámaszú tartót.



Felírva az A és a C keresztmetszetekre a forgatónyomatékok 0 voltát (mivel egyensúlyban vagyunk), két egyismeretlenes egyenletet kapunk, melyekből F_{A1} és F_{C1} meghatározható:

$$M_A = 0 = (\ell_1 + \ell_2)\cdot 1 - (\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \ell_4)\cdot F_{C1} =$$
$$= (1 + 3)\cdot 1 - (1 + 3 + 4 + 2)F_{C1}$$
$$F_{C1} = 0{,}4 \text{ kN}$$
$$M_C = 0 = -(\ell_3 + \ell_4)\cdot 1 + (\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \ell_4)\cdot F_{A1} =$$
$$= -(4 + 2)\cdot 1 - (1 + 3 + 4 + 2)F_{A1}$$
$$F_{A1} = 0{,}6 \text{ kN}$$

A hajlítónyomaték maximális értéke, mely a B keresztmetszetnél lép fel, ezekből meghatározható:

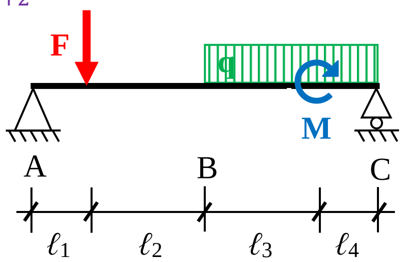
$$M_{h1} = -(\ell_1 + \ell_2)\cdot F_{A1} = -(\ell_3 + \ell_4)\cdot F_{C1} =$$
$$= -(1 + 3)\cdot F_{A1} = -(4 + 2)\cdot F_{C1} = -2{,}4 \text{ kNm}$$

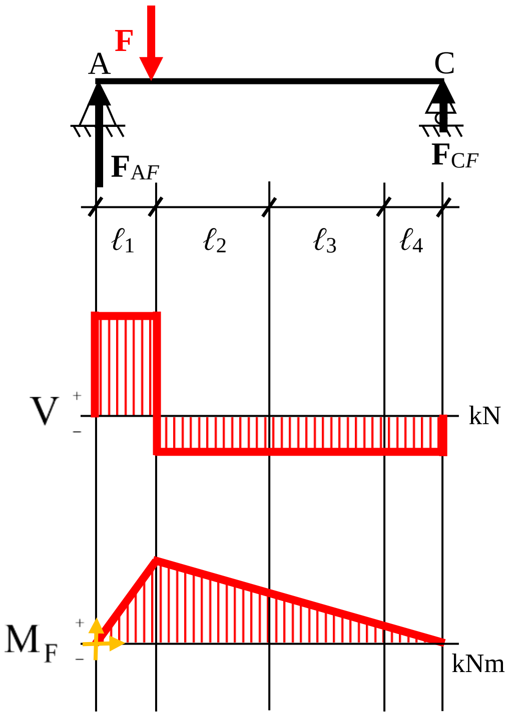
Felvéve egy koordinátarendszert, az egyes szakaszon a hajlítónyomatéki függvények felírhatóak:

$$\boldsymbol{m_1(x) = m_2(x)} = -x\frac{|M_{h1}|}{\ell_1+\ell_2} = -x\frac{2{,}4}{1+3} = \boldsymbol{-0{,}6\,x}$$

$$\boldsymbol{m_3(x) = m_4(x)} = (x - (\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \ell_4))\frac{|M_{h1}|}{\ell_3+\ell_4} = (x - (1 + 3 + 4 + 2))\frac{2{,}4}{4+2} = 0{,}4(x-10) = \boldsymbol{0{,}4\,x - 4}$$

Ezután oldjuk meg a törzstartót az eredeti terheléssel. Itt azonban meg kell határozni a koncentrált **F** erőből, a megoszló **q** erőrendszerből és a koncentrált **M** forgatónyomatékból adódó hajlítónyomaték-járulékokat is. Additív mennyiségről lévén szó, végezzük el ezeket külön-külön.





Csak a koncentrált **F** erőt figyelembe véve ismét felírhatjuk a kéttámaszú tartó A és C keresztmetszeteire a forgatónyomaték nulla voltát, melyből F_{AF} és F_{CF} azonnal adódik:

$$M_A = 0 = -\ell_1 F + (\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \ell_4)\cdot F_{CF} =$$
$$= -1\cdot 2 + (1 + 3 + 4 + 2)F_{CF}$$
$$F_{CF} = 0{,}2 \text{ kN}$$
$$M_C = 0 = (\ell_2 + \ell_3 + \ell_4)\cdot F - (\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \ell_4)\cdot F_{AF} =$$
$$= (3 + 4 + 2)\cdot 2 - (1 + 3 + 4 + 2)F_{AF}$$
$$F_{AF} = 1{,}8 \text{ kN}$$

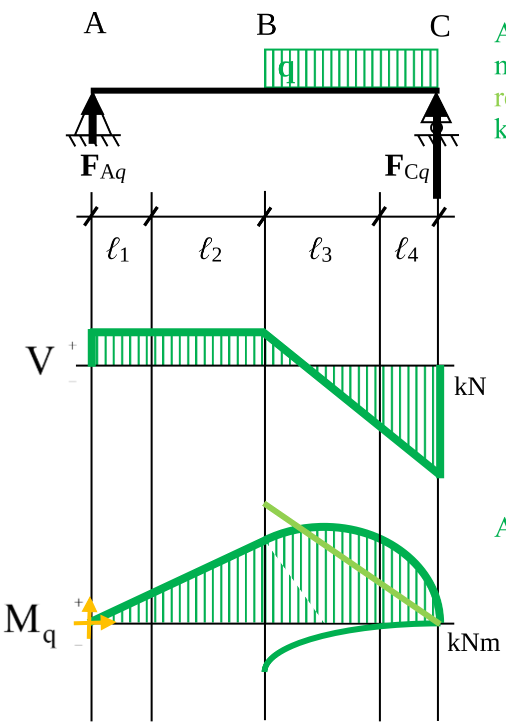
A maximális hajlítónyomaték az **F** erő támadáspontjánál lép fel, értéke:

$$M_{h2} = \ell_1 F_{AF} = (\ell_2 + \ell_3 + \ell_4)\cdot F_{CF} =$$
$$= 1\cdot 1{,}8 = (3 + 4 + 2)\cdot 0{,}2 = 1{,}8 \text{ kNm}$$

Felvéve ugyanazt a koordinátarendszert felírhatóak a hajlítónyomatéki függvények:

$$\boldsymbol{M_{1F}(x)} = x\frac{|M_{h2}|}{\ell_1} = x\frac{1{,}8}{1} = \boldsymbol{1{,}8\,x}$$

$$\boldsymbol{M_{2F}(x) = M_{3F}(x) = M_{4F}(x)} = -(x - (\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \ell_4))\frac{|M_{h2}|}{\ell_2+\ell_3+\ell_4} = -(x - (1 + 3 + 4 + 2))\frac{1{,}8}{3+4+2} = -0{,}2(x-10) = \boldsymbol{2 - 0{,}2\,x}$$



A megoszló erőrendszer hajlítónyomaték-járuléka két komponensből áll: magának a megoszló erőrendszernek a parabolikus és a támaszokon fellépő reakcióerőknek a lineáris járulékából. Először megoldva a kéttámaszú tartót, a kényszereken fellépő reakcióerők meghatározhatók:

$$M_A = 0 = -(\ell_3+\ell_4)\, q \left(\ell_1+\ell_2+\frac{\ell_3+\ell_4}{2}\right) + (\ell_1+\ell_2+\ell_3+\ell_4)\cdot F_{Cq} =$$

$$= -(4+2)\, 3 \left(1+3+\frac{4+2}{2}\right) + (1+3+4+2)\cdot F_{Cq} = -126 + 10F_{Cq}$$

$$F_{Cq} = 12{,}6 \text{ kN}$$

$$M_C = 0 = (\ell_3+\ell_4)\, q \left(\frac{\ell_3+\ell_4}{2}\right) - (\ell_1+\ell_2+\ell_3+\ell_4)\cdot F_{Aq} =$$

$$= (4+2)\cdot 3\cdot\left(\frac{4+2}{2}\right) - (1+3+4+2)F_{Aq} = 54 - 10F_{Cq}$$

$$F_{Aq} = 5{,}4 \text{ kN}$$

A B keresztmetszetben a hajlítónyomaték értéke balról számolva:

$$M_{h3} = (\ell_1+\ell_2)\, F_{Aq} = (1+3)\cdot 5{,}4 = 21{,}6 \text{ kNm}$$

melyből két szakaszra a hajlítónyomatéki függvény felírható:

$$\boldsymbol{M_{1q}(x) = M_{2q}(x)} = x\,\frac{|M_{h3}|}{\ell_1+\ell_2} = x\,\frac{21{,}6}{1+3} = \boldsymbol{5{,}4x}$$

A másik két szakaszra külön kell bontani a megoszló erőrendszer és a koncentrált reakcióerő járulékát. A B keresztmetszetben a koncentrált reakcióerőből származó hajlítónyomaték értéke jobbról számolva:

$$M_{h4} = (\ell_3+\ell_4)\, F_{Cq} = (4+2)\cdot 12{,}6 = 75{,}6 \text{ kNm}$$

melyből a hajlítónyomatéki függvény járuléka:

$$M_{3qF}(x) = M_{4qF}(x) = -(x-(\ell_1+\ell_2+\ell_3+\ell_4))\frac{|M_{h4}|}{\ell_3+\ell_4} = -(x-(1+3+4+2))\frac{75{,}6}{4+2} = -(x-10)\cdot 12{,}6 = -12{,}6x+126$$

A B keresztmetszetben a megoszló erőrendszerből származó hajlítónyomaték értéke jobbról számolva:

$$M_{h5} = (\ell_3+\ell_4)\, q\,\frac{\ell_3+\ell_4}{2} = -(4+2)\cdot 3\cdot\frac{4+2}{2} = -54 \text{ kNm}$$

melyből a hajlítónyomatéki függvény járuléka:

$$M_{3qq}(x) = M_{4qq}(x) = -(x-(\ell_1+\ell_2+\ell_3+\ell_4))^2\,\frac{54}{(4+2)^2} = -1{,}5\,(x-10)^2 = 1{,}5x^2+30x-150$$

Ezen a két szakaszon a hajlítónyomatéki függvények ezek összegei:

$$\boldsymbol{M_{3q}(x) = M_{4q}(x)} = M_{3qF}(x) + M_{3qq}(x) = M_{4qF}(x) + M_{4qq}(x) = 12{,}6(10-x) + 1{,}5(10-x)^2 = \boldsymbol{-1{,}5x^2 + 17{,}4x - 24}$$

Végül vizsgáljuk csak a koncentrált forgatónyomaték hatását.
A kényszereken fellépő reakcióerők egyszerűen számíthatók:

$$M_A = 0 = -M + (\ell_1+\ell_2+\ell_3+\ell_4)\cdot F_{CM} = -4 + (1+3+4+2)F_{CM} = -4 + 10F_{CM}$$

$$F_{CM} = 0{,}4 \text{ kN}$$

$$M_C = 0 = -M + (\ell_1+\ell_2+\ell_3+\ell_4)\cdot F_{AM} = -4 + (1+3+4+2)F_{AM} = -4 + 10F_{AM}$$

$$F_{AM} = 0{,}4 \text{ kN}$$

A koncentrált forgatónyomaték helyén fellépő hajlítónyomaték balról, illetve jobbról számolva:

$$M_{h6} = -(\ell_1+\ell_2+\ell_3)\, F_{AM} = -(1+3+4)\cdot 0{,}4 = -3{,}2 \text{ kNm}$$

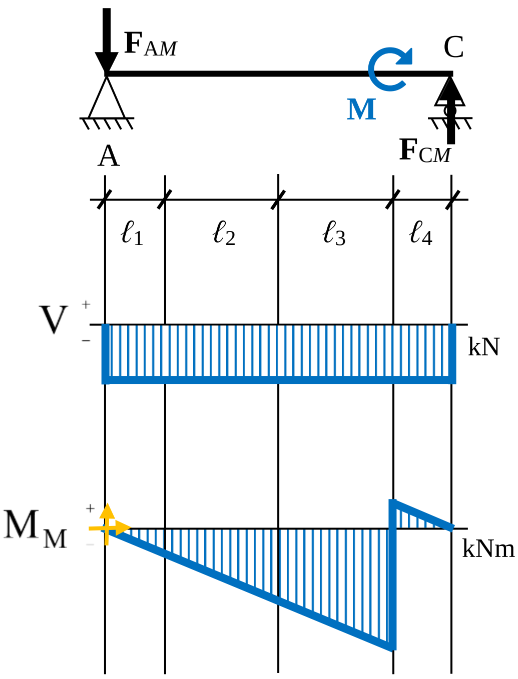
$$M_{h7} = \ell_4\, F_{CM} = 2\cdot 0{,}4 = 0{,}8 \text{ kNm}$$

A hajlítónyomatéki függvények:

$$\boldsymbol{M_{1M}(x) = M_{2M}(x) = M_{3M}(x)} = -x\,\frac{|M_{h6}|}{\ell_1+\ell_2+\ell_3} = -x\,\frac{3{,}2}{1+3+4} = \boldsymbol{-0{,}4x}$$

$$\boldsymbol{M_{4M}(x)} = -(x-(\ell_1+\ell_2+\ell_3+\ell_4))\frac{|M_{h7}|}{\ell_4} = -(x-(1+3+4+2))\frac{0{,}8}{2}$$

$$= -0{,}4(x-10) = \boldsymbol{4 - 0{,}4x}$$



A négy hajlítónyomatéki függvény a törzstartón az eredeti terhelésre az egyes járulékok összege:

$$\boldsymbol{M_1(x)} = M_{1F} + M_{1q} + M_{1M} = 1{,}8x + 5{,}4x - 0{,}4x = \mathbf{6{,}8}\,\boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{M_2(x)} = M_{2F} + M_{2q} + M_{2M} = 2 - 0{,}2x + 5{,}4x - 0{,}4x = \mathbf{4{,}8}\,\boldsymbol{x} + \mathbf{2}$$

$$\boldsymbol{M_3(x)} = M_{3F} + M_{3q} + M_{3M} = 2 - 0{,}2x - 1{,}5x^2 + 17{,}4x - 24 - 0{,}4x = \mathbf{-1{,}5}\,\boldsymbol{x^2} - \mathbf{16{,}8}\,\boldsymbol{x} - \mathbf{22}$$

$$\boldsymbol{M_4(x)} = M_{4F} + M_{4q} + M_{4M} = 2 - 0{,}2x - 1{,}5x^2 + 17{,}4x - 24 + 4 - 0{,}4x = \mathbf{-1{,}5}\,\boldsymbol{x^2} + \mathbf{16{,}8}\,\boldsymbol{x} - \mathbf{18}$$

Az eredeti, statikailag határozatlan tartó esetén a B keresztmetszeten fellépő F_{B} reakcióerőt az alábbi integrál kiértékelésével kaphatjuk meg:

$$F_{\mathrm{B}} = -\frac{\int_0^{\ell_1} m_1(x)M_1(x)dx + \int_{\ell_1}^{\ell_1+\ell_2} m_2(x)M_2(x)dx + \int_{\ell_1+\ell_2}^{\ell_1+\ell_2+\ell_3} m_3(x)M_3(x)dx + \int_{\ell_1+\ell_2+\ell_3}^{\ell_1+\ell_2+\ell_3+\ell_4} m_4(x)M_4(x)dx}{\int_0^{\ell_1} m_1^2dx + \int_{\ell_1}^{\ell_1+\ell_2} m_2^2dx + \int_{\ell_1+\ell_2}^{\ell_1+\ell_2+\ell_3} m_3^2dx + \int_{\ell_1+\ell_2+\ell_3}^{\ell_1+\ell_2+\ell_3+\ell_4} m_4^2(x)dx} =$$

$$= -\frac{\int_0^{1}(-0{,}6x)(6{,}8x)dx + \int_1^{4}(-0{,}6x)(4{,}8x+2)dx + \int_4^{8}(0{,}4\,x-4)(-1{,}5x^2+16{,}8x-22)dx + \int_8^{10}(0{,}4\,x-4)(-1{,}5x^2+16{,}8x-18)dx}{\int_0^{1}(-0{,}6x)^2dx + \int_1^{4}(-0{,}6x)^2dx + \int_4^{8}(0{,}4\,x-4)^2dx + \int_8^{10}(0{,}4\,x-4)^2dx} =$$

$$= -\frac{\int_0^{1}(-4{,}08x)dx + \int_1^{4}(-2{,}88x^2-1{,}2x)dx + \int_4^{8}(-0{,}6x^3+12{,}72x^2-76\,x+88)dx + \int_8^{10}(-0{,}6x^3+12{,}72x^2-74{,}4x+72)dx}{\int_0^{1}(0{,}36x^2)dx + \int_1^{4}(0{,}36x^2)dx + \int_4^{8}(0{,}16x^2-3{,}2x+16)dx + \int_8^{10}(0{,}16x^2-3{,}2x+16)dx} =$$

$$= -\frac{-231}{19{,}2} = 12{,}03125 \text{ kN}$$

Ezt az erőt innentől kezdve úgy tekinthetjük, mint egy konstans külső terhelő erő és a tartó egyszerű kéttámaszú statikailag határozott tartóként megoldható.

$$M_{\mathrm{A}} = 0 = -\ell_1F + (\ell_1+\ell_2)\cdot F_{\mathrm{B}} - (\ell_1+\ell_2+\frac{\ell_3+\ell_4}{2})q(\ell_3+\ell_4) - M + (\ell_1+\ell_2+\ell_3+\ell_4)\cdot F_{\mathrm{C}} =$$

$$= -1\cdot 2 + (1+3)\cdot 12{,}03 - (1+3+\frac{4+2}{2})\,3\,(4+2) - 4 + (1+2+3+4)\cdot F_{\mathrm{C}}$$

$$F_{\mathrm{C}} = 8{,}37 \text{ kN}$$

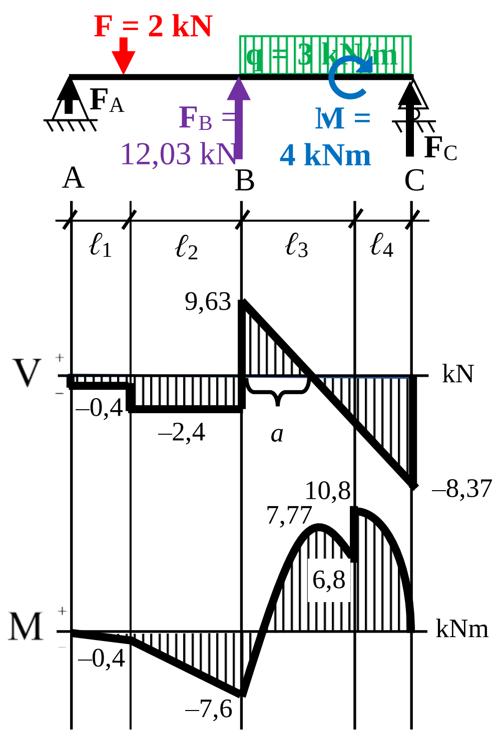
$$M_{\mathrm{C}} = 0 = -(\ell_1+\ell_2+\ell_3+\ell_4)\cdot F_{\mathrm{A}} + (\ell_2+\ell_3+\ell_4)\cdot F - (\ell_3+\ell_4)\cdot F_{\mathrm{B}} + \frac{\ell_3+\ell_4}{2}q(\ell_3+\ell_4) - M =$$

$$= -(1+3+4+2)\cdot F_{\mathrm{A}} + (3+4+2)\cdot 2 - (4+2)\cdot 12{,}03 + \frac{4+2}{2}\,3\,(4+2) - 4$$

$$F_{\mathrm{A}} = -0{,}4 \text{ kN}$$

Ezzel ekvivalens eredményre jutunk, ha nem a B keresztmetszetben, hanem a C keresztmetszetnél található görgőt hagyjuk el. Bár a számolás során más lesz az $M_0(x)$ és az $m_0(x)$ hajlítónyomatéki függvény is, az ezek segítségével meghatározott F_{C} erő meg fog egyezni az előbbi számolás végén kapott eredménnyel.

Az erők ismeretében a nyíróerőábra felrajzolható.



A Zsuravszkij-tétel alapján ahol a 3. szakaszon a nyíróerőábra 0, ott a hajlítónyomatéknak szélsőértéke lesz. Hasonló háromszögek segítségével meghatározva az a távolságot:

$$\frac{9{,}63}{a} = \frac{8{,}37}{6-a}$$

$$a = 3{,}21 \text{ m}$$

A hajlítónyomaték a szabad végeken 0. Az M_{h} értéke az F erő támadáspontjában:

$$M_{\mathrm{h}} = \ell_1\cdot F_{\mathrm{A}} = 1\cdot(-0{,}4) = -0{,}4 \text{ kNm}$$

Az M_{h} értéke a B keresztmetszetben:

$$M_{\mathrm{h}} = (\ell_1+\ell_2)\cdot F_{\mathrm{A}} - \ell_2F = (1+3)\cdot(-0{,}4) - 3\cdot 2 = -7{,}6 \text{ kNm}$$

A hajlítónyomaték értéke a koncentrált nyomatéknál jobbról számolva:

$$M_{\mathrm{h}} = \ell_4F_{\mathrm{C}} - \ell_4q\,\frac{\ell_4}{2} = 10{,}8 \text{ kNm}$$

Az M_{h} értéke a koncentrált nyomatéknál balról számolva:

$$M_{\mathrm{h}} = (\ell_1+\ell_2+\ell_3)F_{\mathrm{A}} - (\ell_2+\ell_3)F + \ell_3F_{\mathrm{B}} - \ell_3q\,\frac{\ell_3}{2} = 6{,}8 \text{ kNm}$$

Az M_{h} értéke a nyíróerőábra zérushelyénél balról számolva:

$$M_{\mathrm{h}} = (\ell_1+\ell_2+3{,}21)\cdot F_{\mathrm{A}} - (\ell_2+3{,}21)\cdot F + 3{,}21\cdot F_{\mathrm{B}} - 3{,}21\cdot q\cdot\frac{3{,}21}{2} = 7{,}77 \text{ kNm}$$