NEMZETI
KÖZSZOLGÁLATI EGYETEM

HADTUDOMÁNYI ÉS HONVÉDTISZTKÉPZŐ KAR

TERMÉSZETTUDOMÁNYI TANSZÉK

Operációkutatás alapjai

Gráfelméleti alapok

1736

Königsberg

Van-e olyan városrész, amelyből indulva bejárhatják a hidakat úgy, hogy mindegyiken pontosan egyszer menjenek át, de nem kell feltétlenül visszaérkezniük a kiindulási helyre?

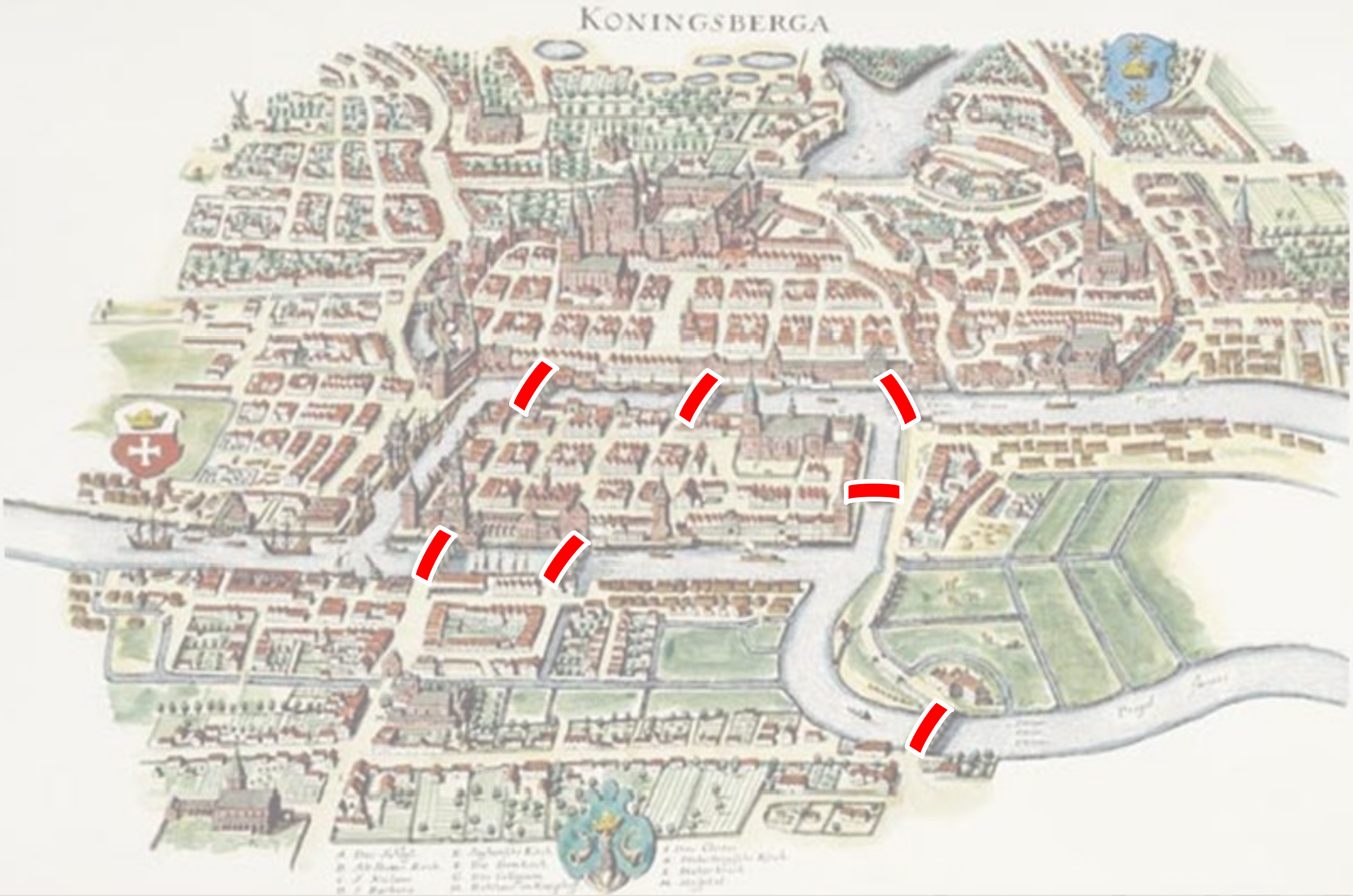
Legkevesebb hány hidat kell építeni, és hova, hogy legyen olyan városrész, amelyből indulva be tudják járni a hidakat úgy, hogy mindegyiken pontosan egyszer menjenek át, és nem kell feltétlenül vissza- érkezniük a kiindulási helyre?

Legkevesebb hány hidat kell építeni, és hova, hogy legyen olyan városrész, amelyből indulva be tudják járni a hidakat úgy, hogy mindegyiken pontosan egyszer menjünk át, és visszaérkezzenek a kiindulási helyre?

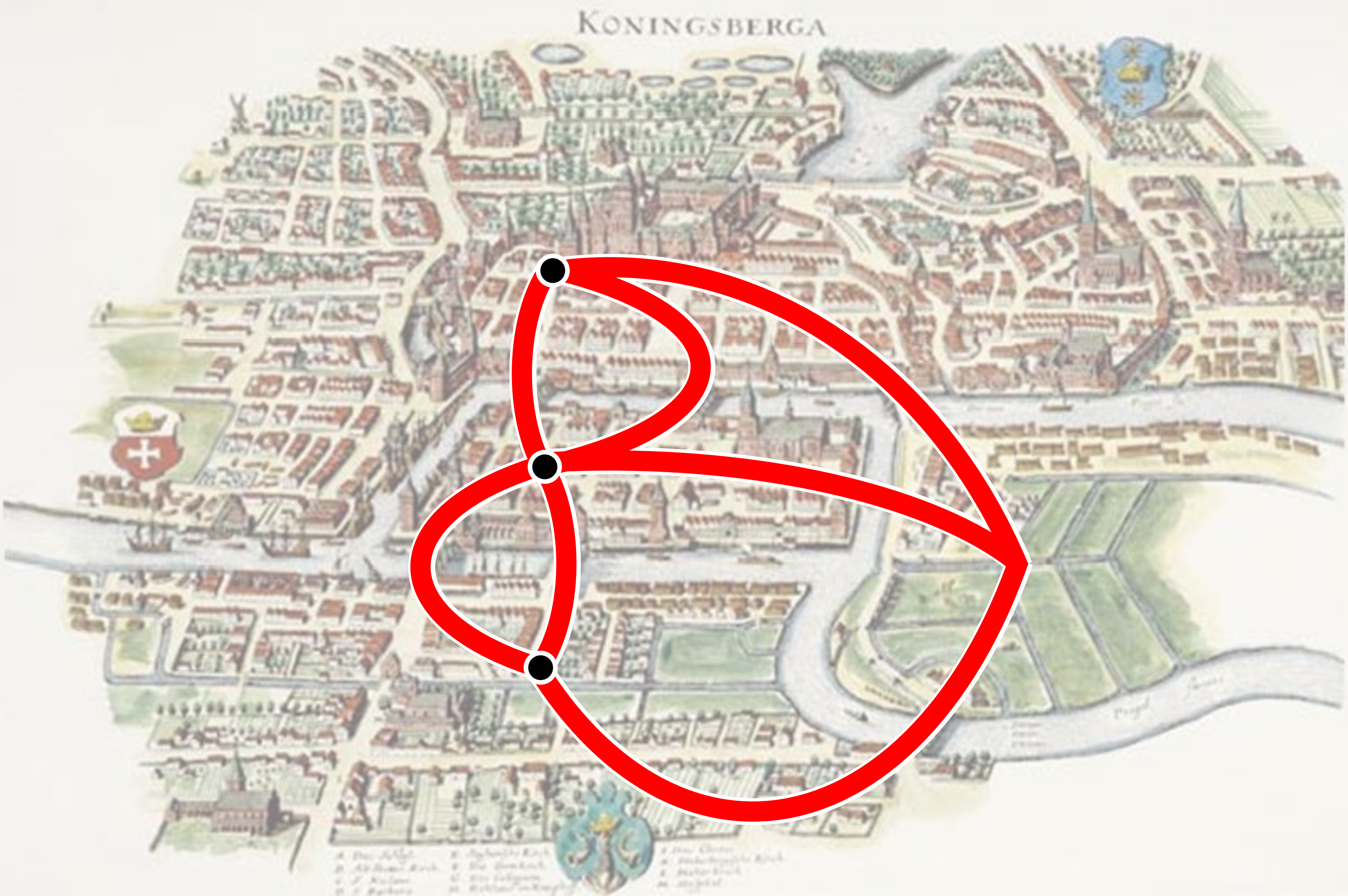
Matematizálás

- Leonhard Euler (1707-1783) svájci matematikus, fizikus, csillagász, logikus, mérnök
- Daniel Bernoulli meghívására ekkor Szentpéterváron, az Orosz Birodalmi Tudományos Akadéma matematikai osztályának vezetőjeként dolgozott.
- Ő fogalmazta meg precízen, matematikailag kezelhető (és általánosítható) formában a problémát és válaszolta is meg azt.

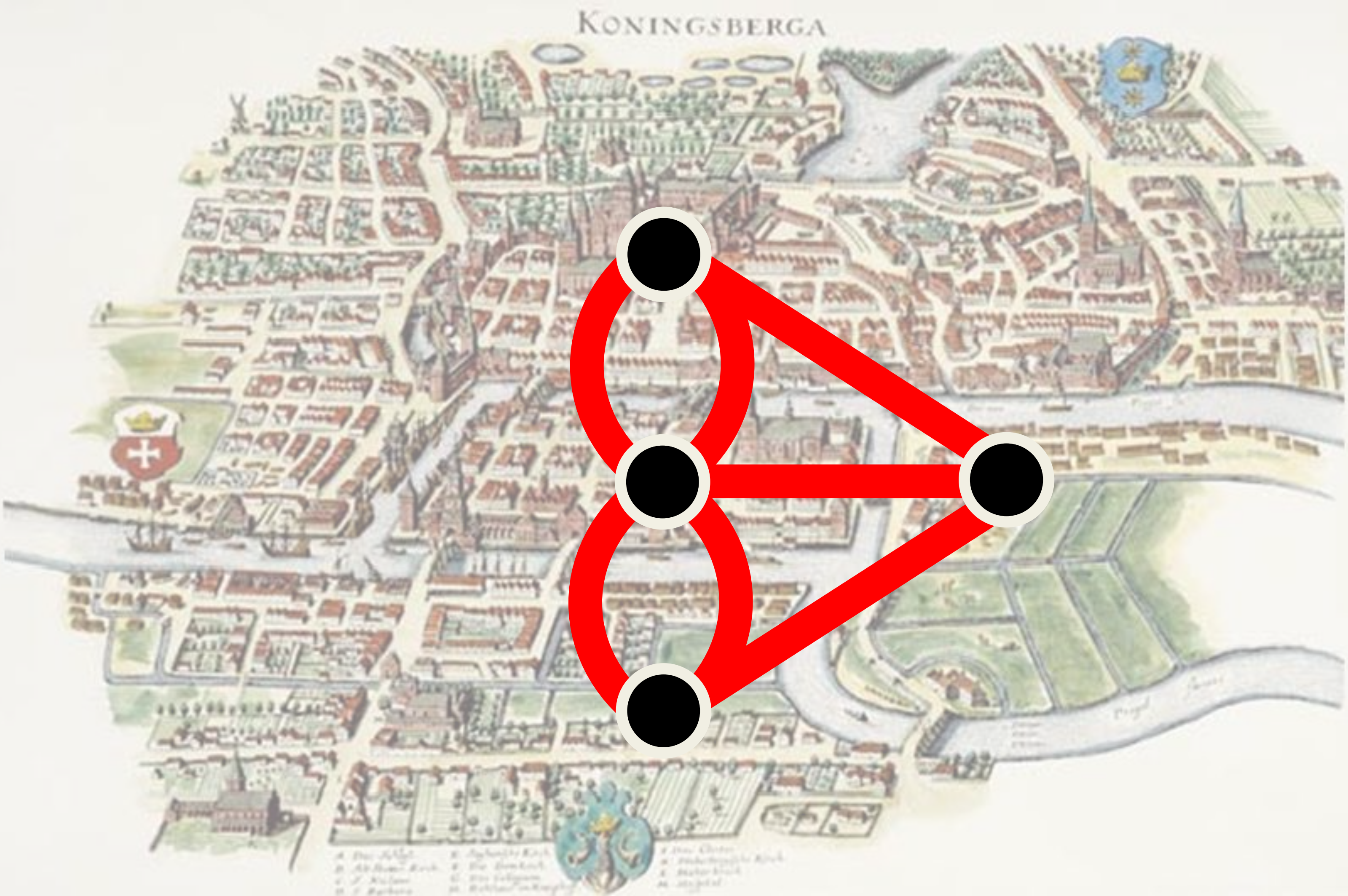
Sétautak



Sétautak



Sétautak



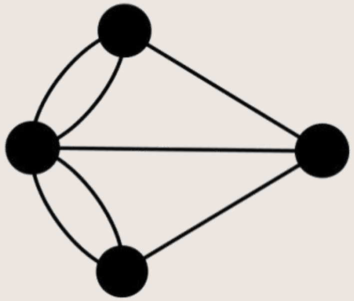
Gráf

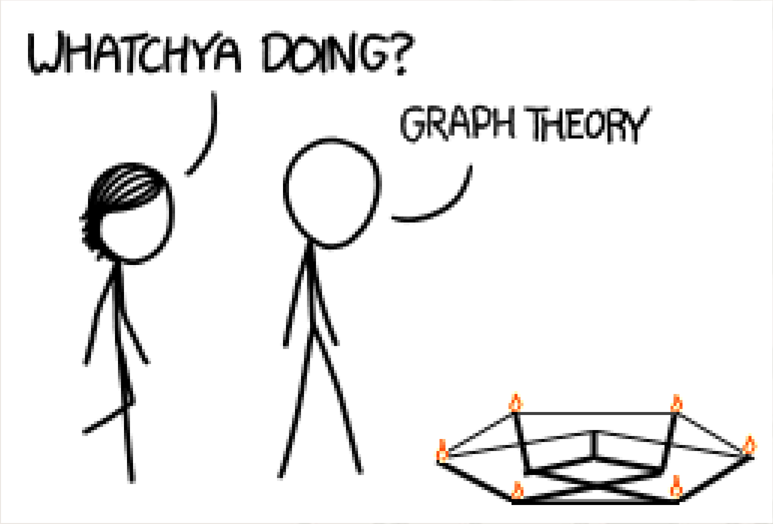
- Gráfnak nevezzük véges sok pont és az azokat összekötő szintén véges sok egyszerű ív unióját. A pontok a gráf csúcsai (*V*, *vertex*, *node*), az ívek a gráf élei (*E*, *edge*, *arc*). Az élek mindkét vége csúcsra illeszkedik.
- Adott egy *E*, egy vele diszjunkt nemüres *V* halmaz és a Φ illeszkedési leképezés: E $\longrightarrow \binom{V}{a}$, $a \in \{1, 2\}$.

  A (Φ, *V*, *E*) hármast gráfnak nevezzük.

Gráf

- Jelölés: $G=(V, E)$
- a, $b \in V$, a köztük levő él $\{a,b\} \in E$
- Gráf diagramja: annak valamilyen képi megjelenítése.

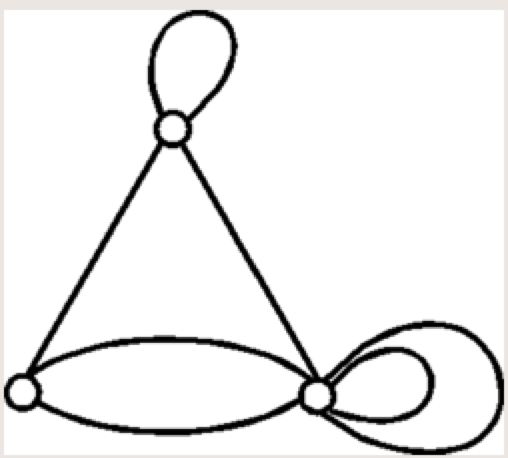




xkcd.com

Hurokél

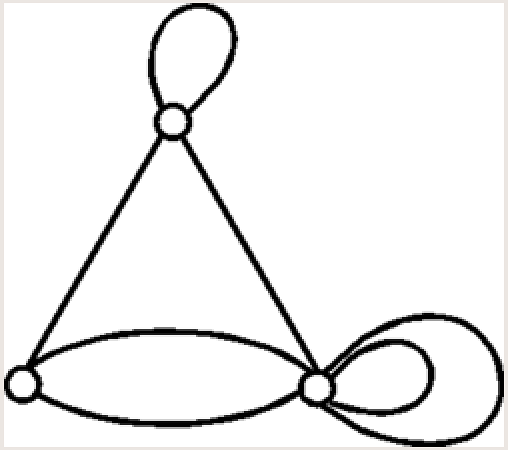
- Minden élnek két végpontja van.
- Ami lehet azonos is.
- loop

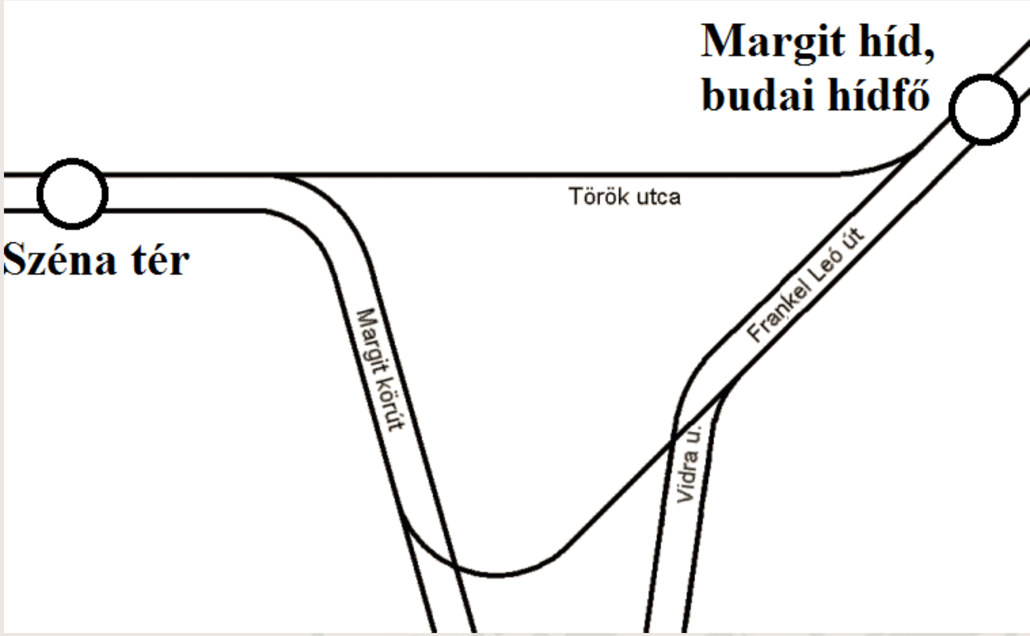


- Teresztenye

Többszörös él

- multiple edge
- Két csúcsot egynél több él is összeköthet.
- multigráf / pszeudográf

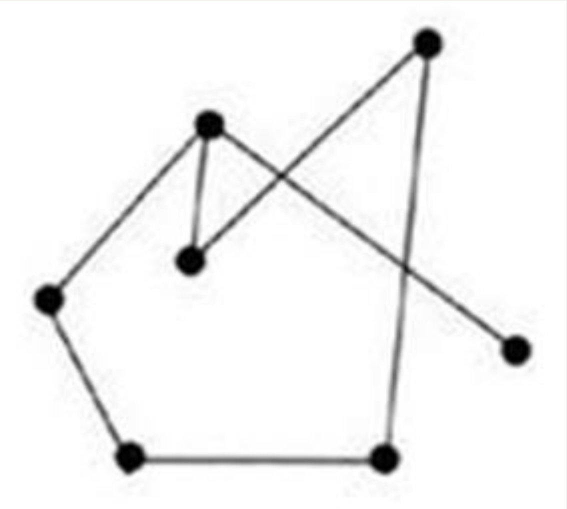


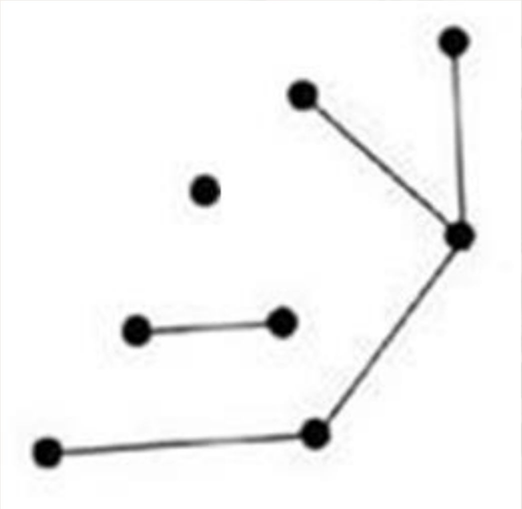


- 17-es villamos
- Két vágány, két sáv, párhuzamos alsóbbrendű út

Egyszerű gráf

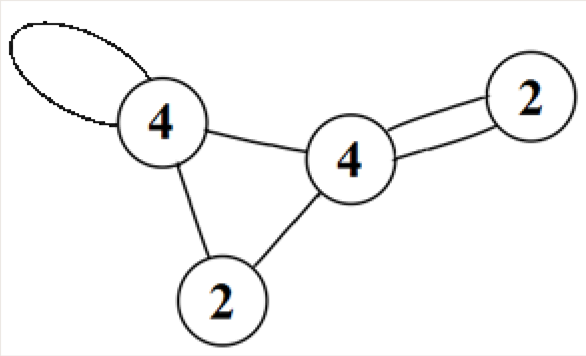
- Egy gráfot egyszerűnek nevezünk, ha bármely két csúcsot legfeljebb egy él köt össze, és bármely él végpontjai különböző csúcsok, azaz ha nem tartalmaz többszörös- vagy hurokélt.





Fokszám

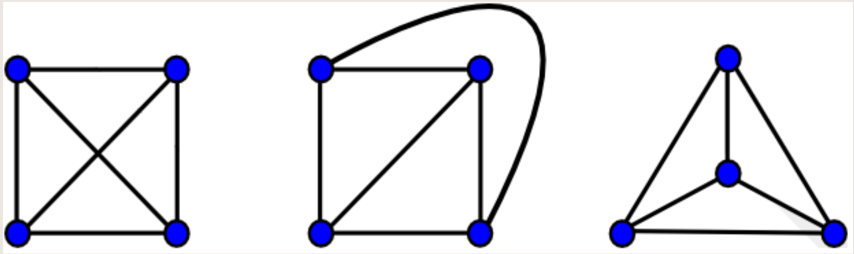
- degree
- Az adott csúcsra illeszkedő élek száma
- A *G* gráf *a* csúcsának fokszáma: $d_G(a)$

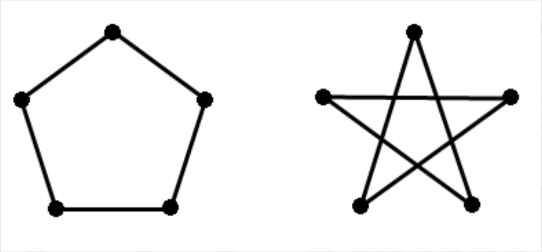


- Eloszlása a gráf alapvető tulajdonsága.
- Az olyan gráfot, melynek minden csúcsa páros fokszámú, páros gráfnak nevezünk.

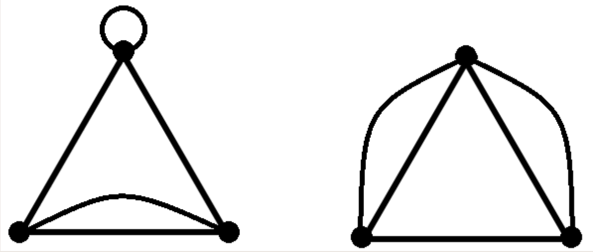
Izomorfizmus

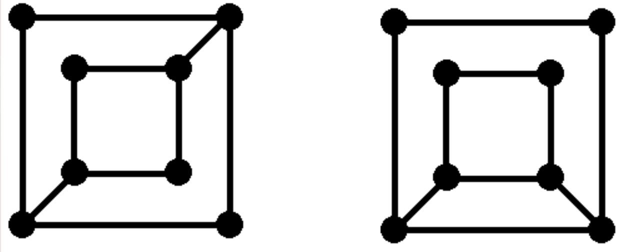
- Két gráf „egyenlősége”: $G \sim H$
- Egy-egy értelmű megfeleltetés. Ha két csúcs szomszédos G-ben $\Leftrightarrow$ megfelelőik szomszédosak H-ban.





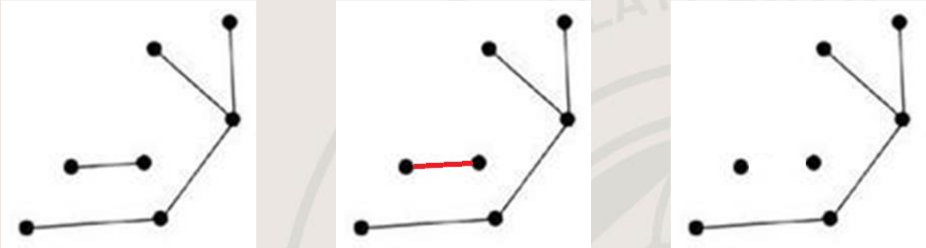
- Csak a fokszámok egyezősége nem elégséges, egyszerű gráfokra sem:



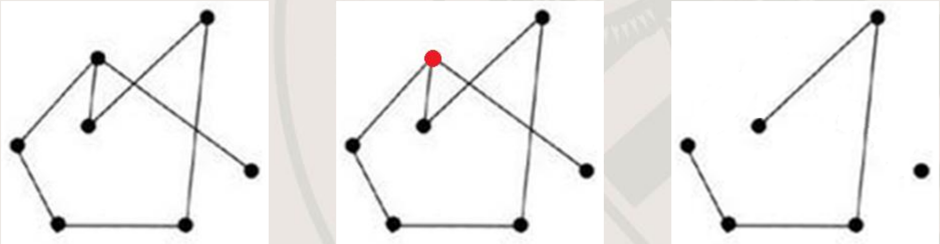


Részgráf

- subgraph
- $H=(F, W) \subset G=(E, V)$ ha $F \subset E$ és $W \subset V$
- Feszített részgráf (induced subgraph): a csúcsok egy részhalmaza és a köztük levő összes él
- Élt lehet törölni csúcs nélkül is.



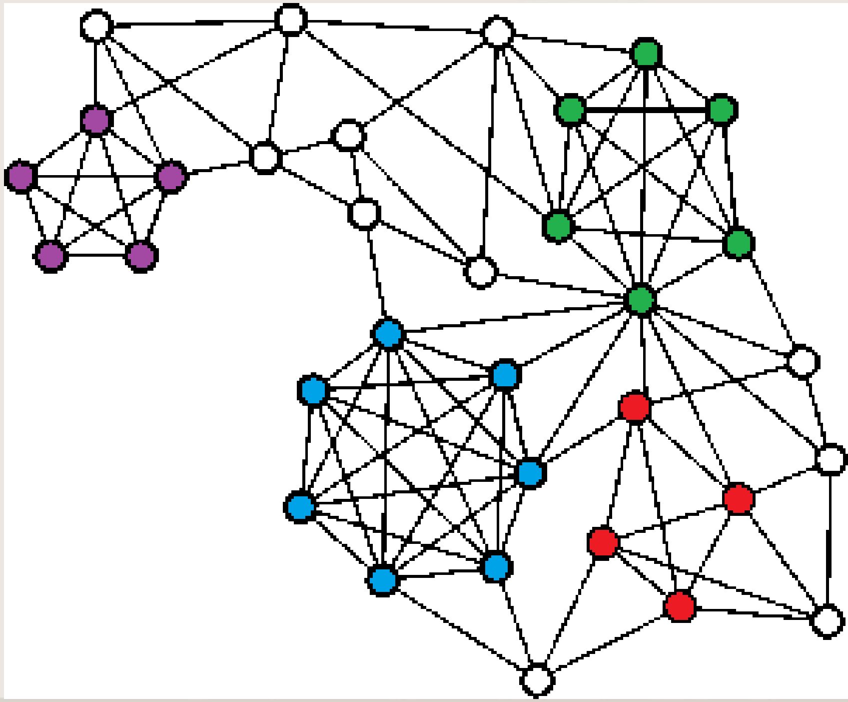
- Csúcsot törölni csak a hozzá tartozó élekkel együtt lehet.



Klikk

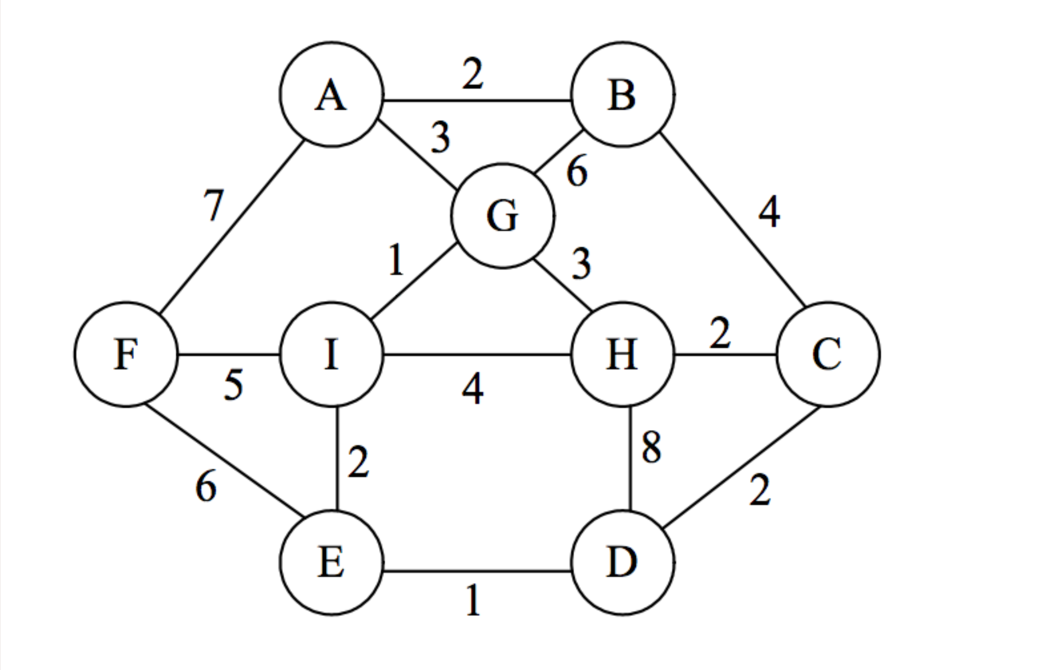
- clique
- Olyan csúcsok halmaza, melyek páronként szomszédosak.
- Egy gráf teljes feszített részgráfja.

- Ismeretségi körök
  (egy társaságban mindenki ismer mindenkit)
  lásd később a klaszteranalízinél



Súlyozott gráf

- Minden élhez egy számértéket (súlyt) rendelünk.
- Anti-él súlya ∞.
- Súlyozatlan gráf: gyk. minden élének a súlya 1.

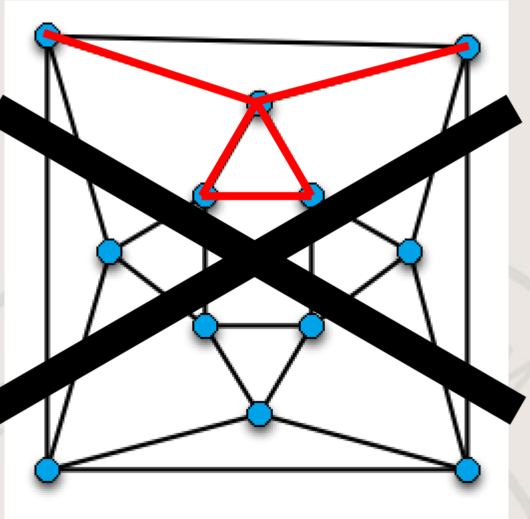


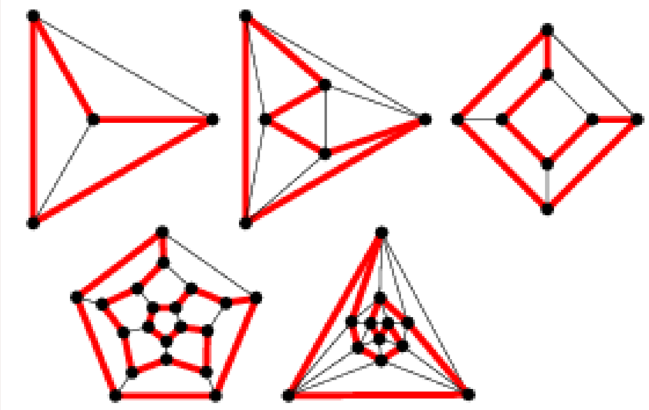
Séta

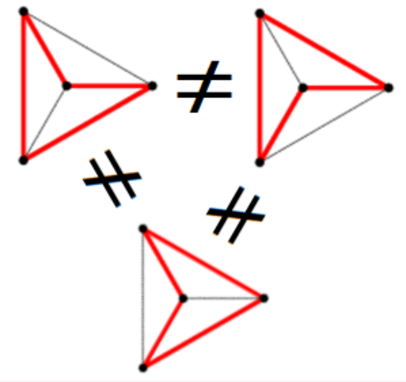
- *v* darab csúcs és *e* darab él váltakozó sorozata, mely csúccsal kezdődik és csúcsban végződik, és minden csúcs szomszédos az őt megelőző és őt követő éllel, illetve minden él két végpontja az őt megelőző és az őt követő csúcs. Egy séta zárt, ha első és utolsó csúcsai megegyeznek, különben nyitott. (walk)
- Nyílt: $e = v - 1$; zárt: $e = v$
- Hossza: a benne szereplő súlyozatlan élek száma VAGY az élek súlyainak összege. A hossz lehet 0.
- Euler-séta: minden élet pontosan egyszer használ, de egy csúcsot akár többször is érinthet.

Út, kör

- Út (path): egyszerű nyílt séta, azaz a séta nem látogatja meg kétszer ugyanazt a csúcsot.
- Kör (cycle, circuit): Zárt út
- Hamilton-kör (Hamiltonian cycle): minden csúcsot érintő zárt út.



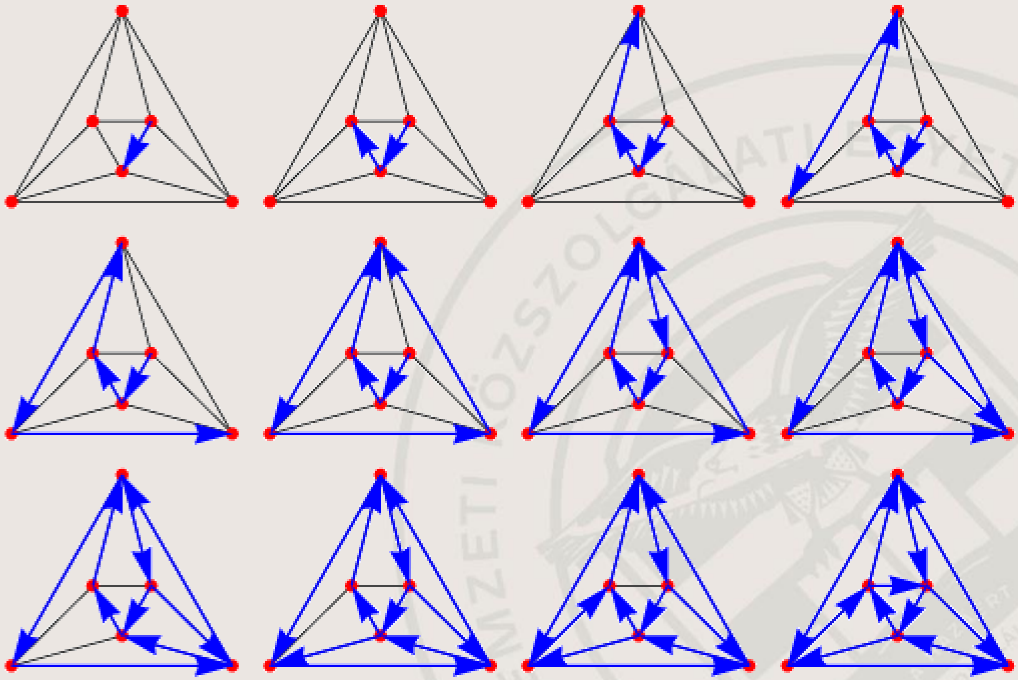




Két út éldiszjunkt, ha nincs közös élük.

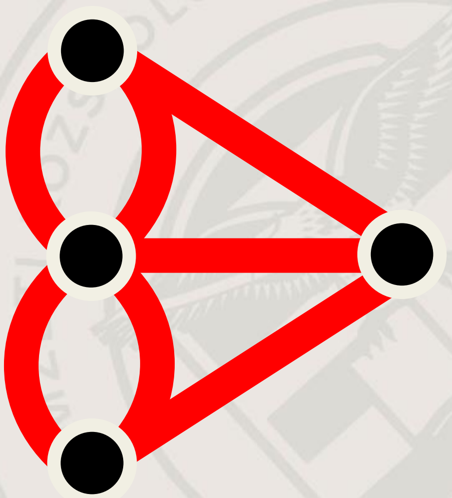
Vonal

- Vonal (trail): olyan séta, melyben minden él legfeljebb egyszer fordul elő, de a csúcsok többször is előfordulhatnak.
- Euler-vonal: olyan vonal, mely minden élen áthalad.
- Euler-kör: zárt Euler-vonal.



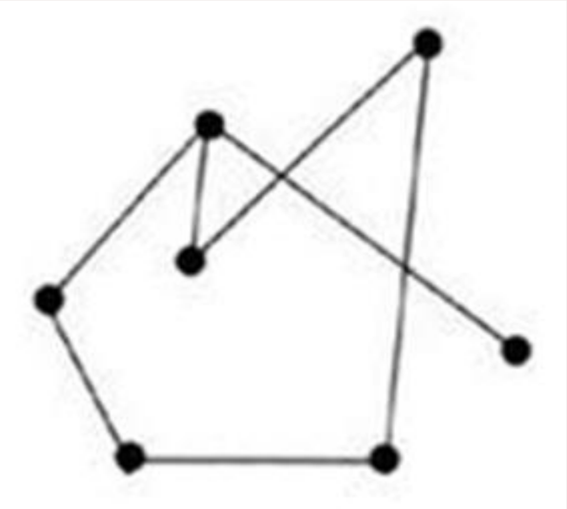
Königsberg

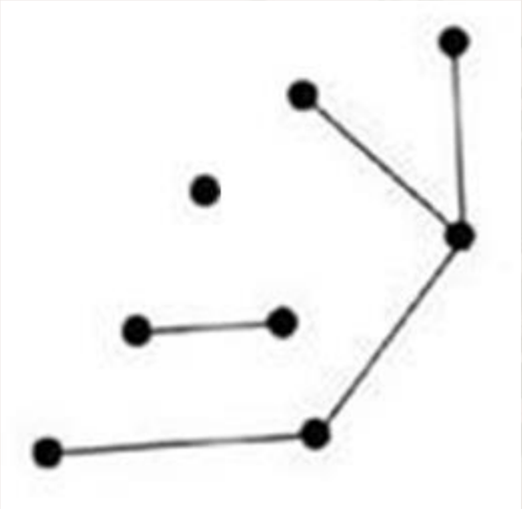
- Egy gráfban Euler-kör létezésének **szükséges** feltétele, hogy minden pont fokszáma páros legyen. (Nem páros gráfban biztosan nincs Euler-kör.)
- Egy gráfban nyitott Euler-vonal létezésének **szükséges** feltétele, hogy két pont fokszáma páratlan, a többi páros legyen.
- Mi kell még?



Összefüggőség

- Egy gráfot összefüggőnek nevezünk, ha bármely két csúcsához létezik olyan útvonal, melynek kezdőpontja az egyik tekintett csúcs, végpontja pedig a másik.
- Izolált csúcs: nem illeszkedik rá él.





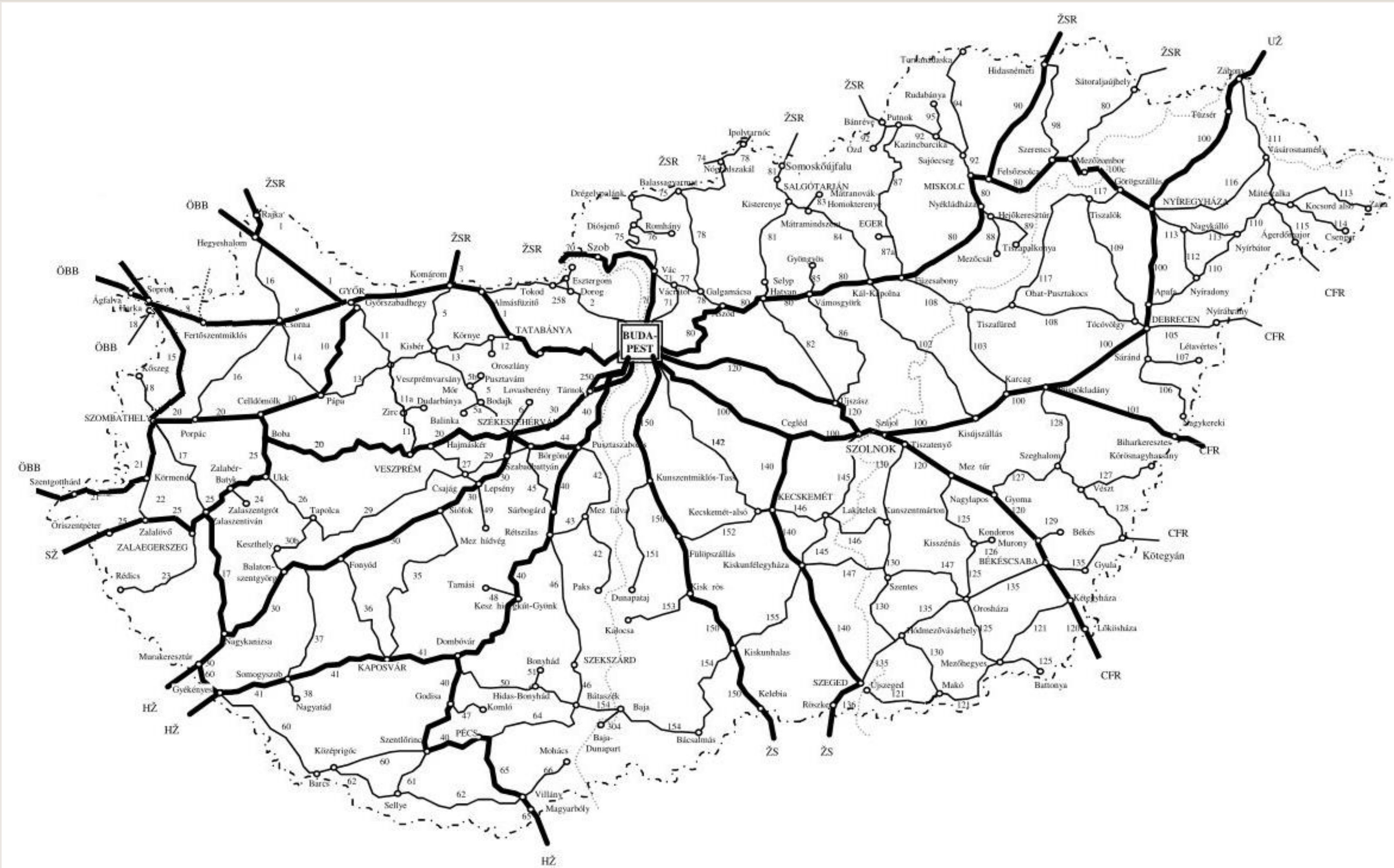
(Csúcs)Összefüggőség

- Elvágó pont: az adott csúcsot (és a vele szomszédos éleket) elhagyva a gráf két komponensre esik szét, azaz a megmaradó részgráf már nem lesz összefüggő.
- Ha a gráf bármely *k*–1 darab csúcs elhagyása után összefüggő, de *k* darab elhagyása után már nem, akkor *k*-szorosan összefüggőnek nevezzük.
- A magyarországi vasúthálózat 1-szeresen összefüggő a zsákvonalak csatlakozóállomásai miatt.
- Elválasztó pont: amelyet elhagyva a gráf komponenseinek száma nő.

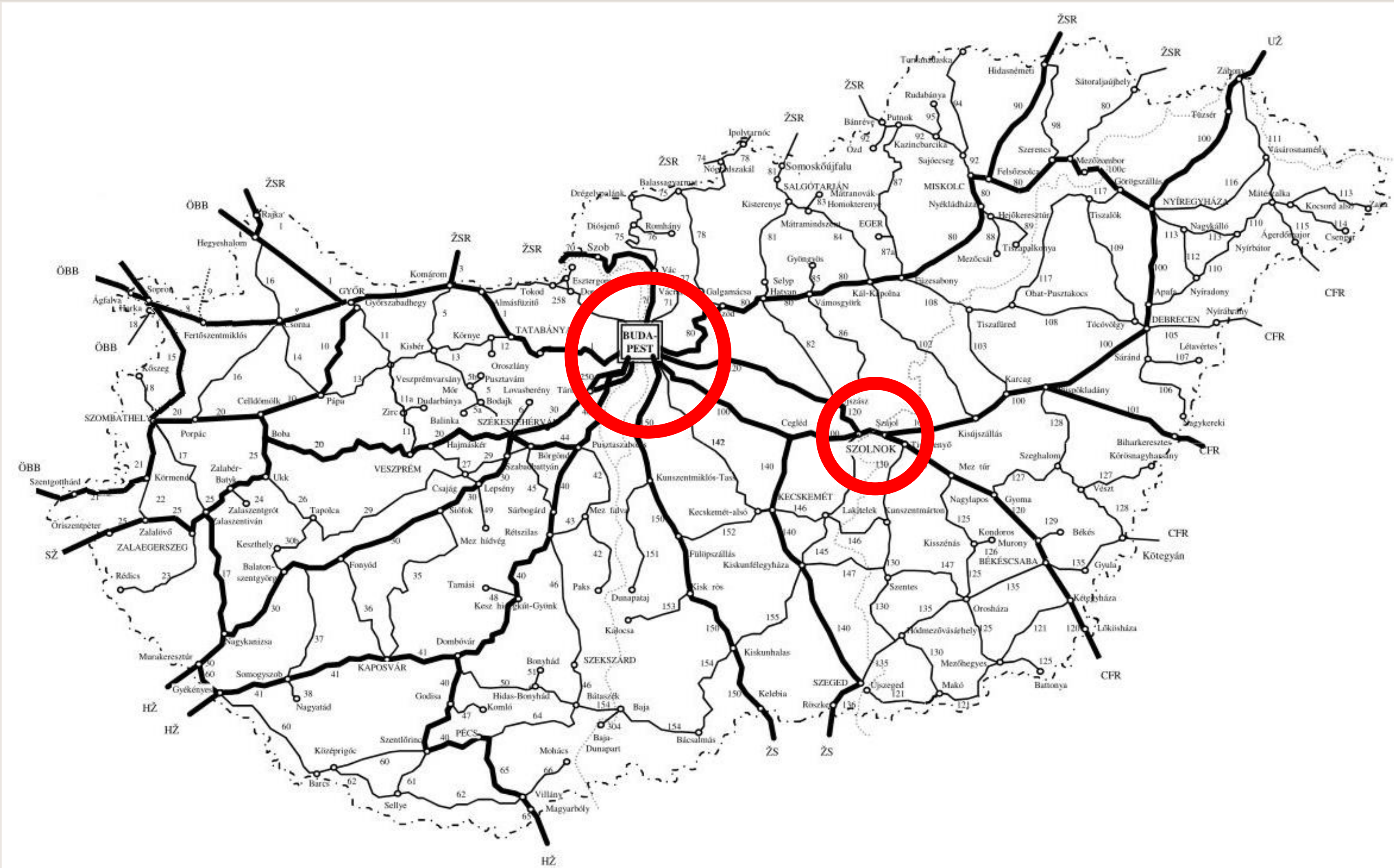
Élösszefüggőség

- Elvágó él: az adott élt elhagyva a gráf két komponensre esik szét, azaz a megmaradó részgráf már nem lesz összefüggő.
- Ha a gráf bármely k–1 darab él elhagyása után összefüggő, de k darab elhagyása után már nem, akkor k-szorosan élösszefüggőnek nevezzük.
- Elválasztó él / hídél / híd: amelyet elhagyva a gráf komponenseinek száma nő.

Összefüggő hálózat (?)

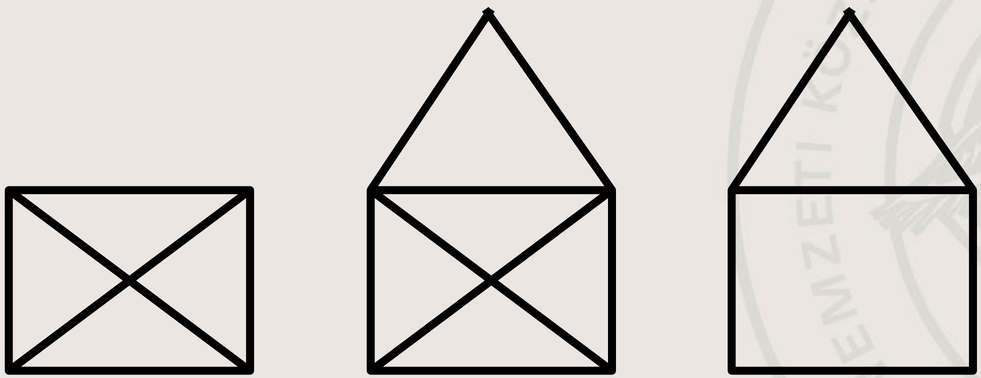


Könnyen megbontható...

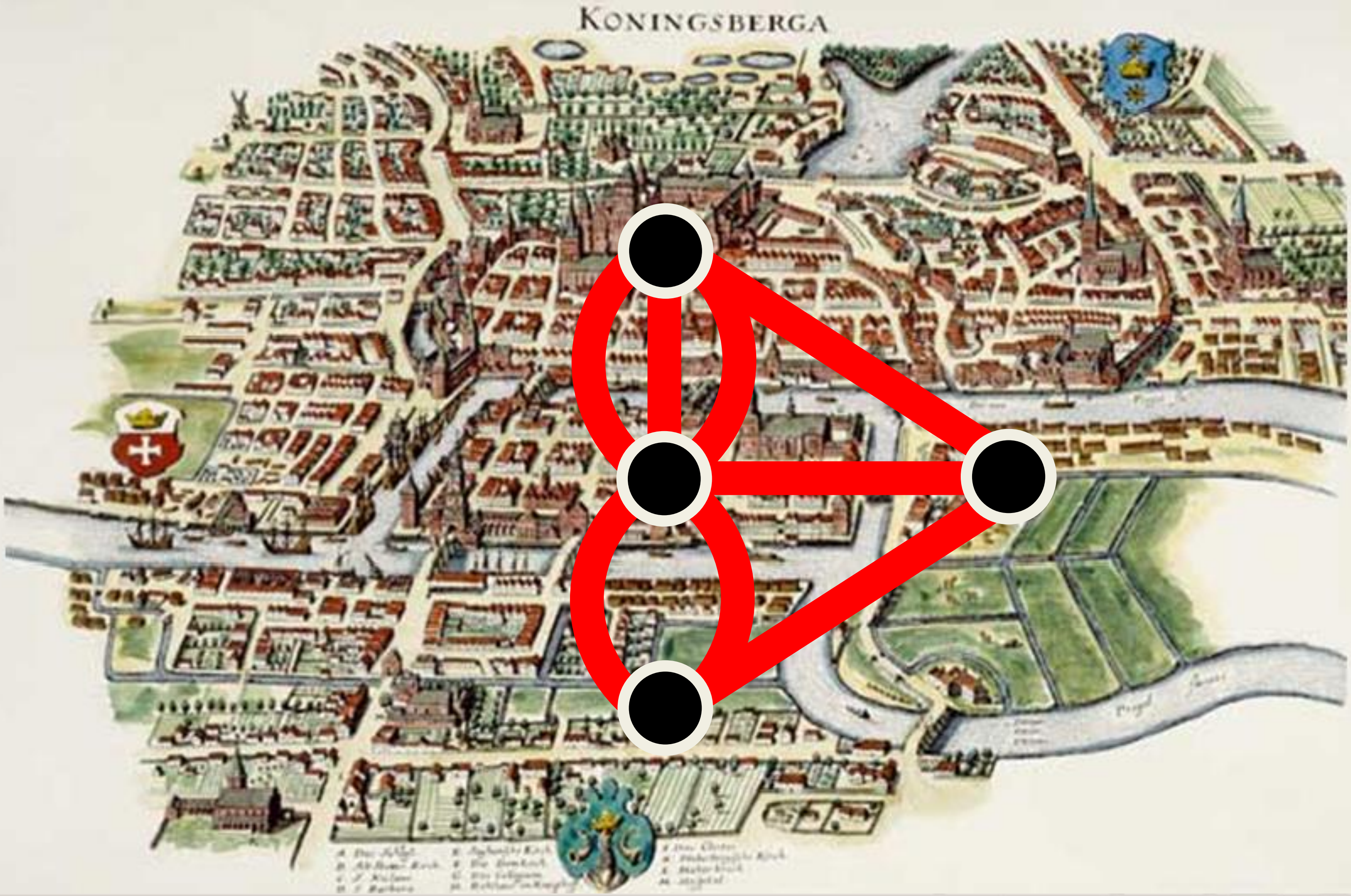


Lerajzolható egy vonallal?

- Ha egy **összefüggő** gráfban két pont fokszáma páratlan, a többi pont fokszáma páros, akkor a gráfban van nyitott Euler-vonal.
- Ha egy **összefüggő** gráfban minden pont fokszáma páros, akkor a gráfban van Euler-kör. (pl. Fleury-algoritmus, Hierholzer-algoritmus)

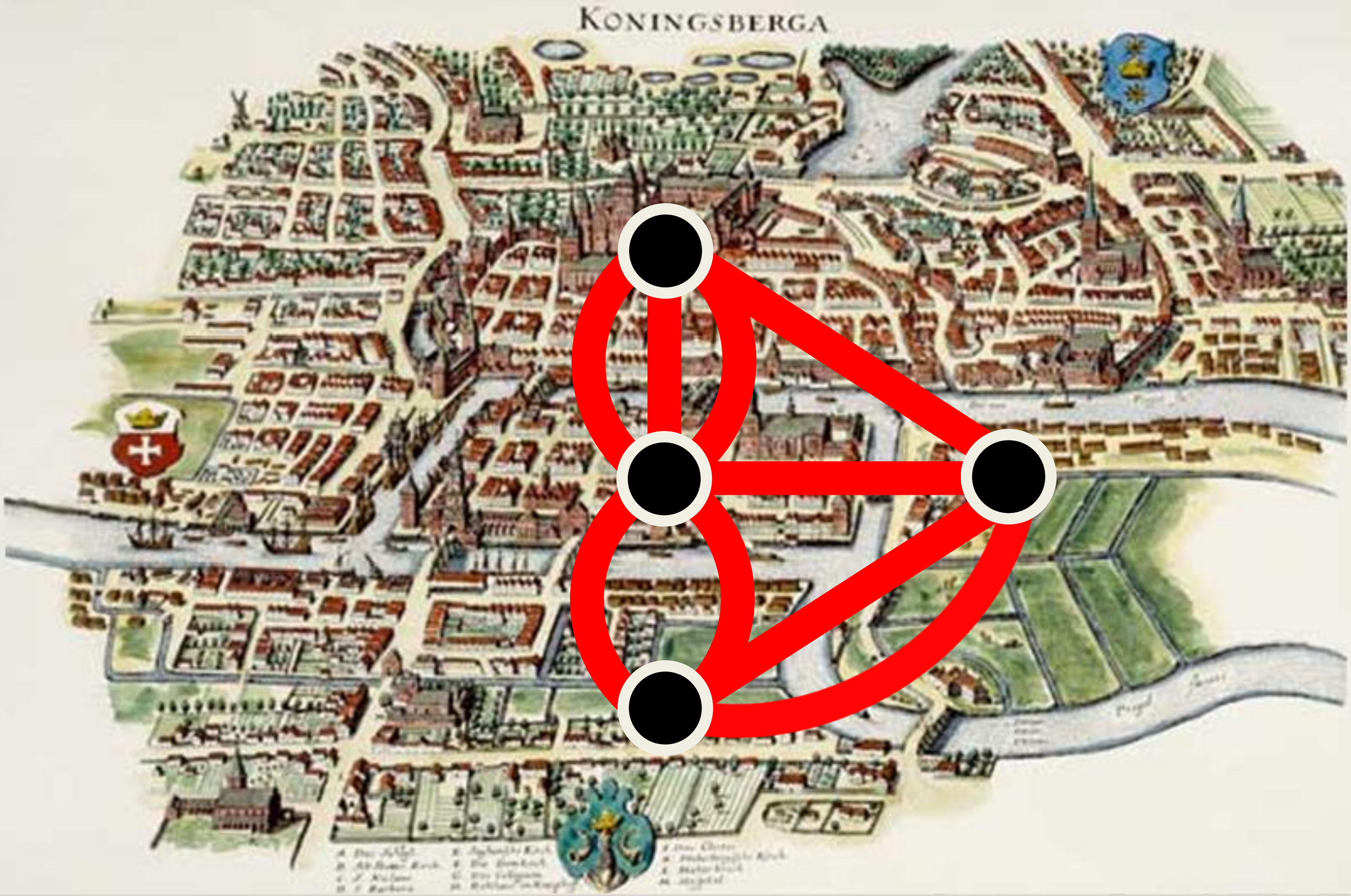


Königsberg – Euler-út

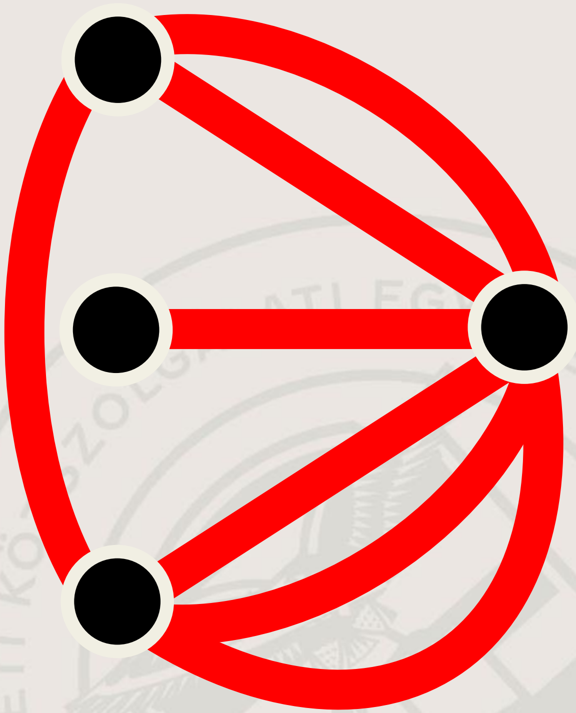


NEMZETI
KÖZSZOLGÁLATI EGYETEM
HADTUDOMÁNYI ÉS HONVÉDTISZTKÉPZŐ KAR
TERMÉSZETTUDOMÁNYI TANSZÉK

Königsberg – Euler-kör



Kalinyingrád ma




Köszönöm a figyelmet!
Kérdések?