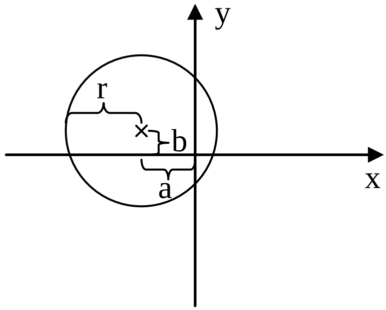
**Kör egyenlete:**
$(x+a)^2+(y+b)^2=r^2$
Ha a>0 és b>0: lásd az ábrát →
Ha a<0 vagy b<0, pozitív irányba van a kör középpontja eltolva az adott tengely mentén.




**Feltételes valószínűség:**
Van két esemény: „A” és „B”. „A” valószínűsége „B” feltétel mellett (jelölése: P(A|B) ) azt jelenti, hogy ha a „B” esemény biztosan bekövetkezik, akkor mekkora az „A” esemény bekövetkezésének valószínűsége? Azaz csak azokkal az eseménypárokkal foglalkozunk, melyeknél a „B” esemény megtörténik és ekkor mennyi annak a valószínűsége, hogy az „A” esemény is megtörténik. Más szavakkal: mennyi a valószínűsége, hogy „A” igaz, ha „B” igaz?

1. példa
Egy üzletben háromféle méretű ruha kapható: S, M, L. Ezek megoszlása: S: 30%, M: 44%, L: 26%.
A ruhákat kívánságra méretre igazítják. Statisztikai adatokból ismeretes, hogy egyes méretekből az alakra igazítás valószínűsége rendre: 20%; 10% és 15%.

$B_1$, $B_2$, $B_3$ és A események: $B_1$=S, $B_2$=M, $B_3$=L, A= igazításra szorul

Tudjuk:
$P(B_1)=0,3$; $P(B_2)=0,44$; $P(B_3)= 0,3$; $P(A|B_1)=0,2$; $P(A|B_2)=0,1$; $P(A|B_3)=0,2$

Mennyi a valószínűsége, hogy egy eladott ruhát igazítani kell?

Teljes valószínűség tétele:
$P(A) = P(A|B_1)*P(B_1) + P(A|B_2)*P(B_2)+...$
$P(A) = 0,2*0,3+0,1*0,44+0,26*0,15 = 0,143$

Egy eladott ruha igazításra szorul. Mi a valószínűsége, hogy az S-es méretből való?

Bayes-tétel:
$$P(B_1|A)=\frac{P(A\,|\,B_1)*P(B_1)}{P(A)}=\frac{0,2*0,3}{0,143}=0,419$$

2. példa

A X. kerületben a családok 36%-ának van kutyája és 30%-ának van macskája. Azon családok közül, akiknek kutyájuk van, 22%-nak macskája is van.

Tudjuk:
P(K) = 0,36; P(M) = 0,3; P(M|K) = 0,22

A családok hány százalékának van kutyája ÉS macskája is?

Azaz a kérdés a KM esemény valószínűsége, vagyis P(KM).
P(KM) = P(M|K)*P(K) = 0,22*0,36 = 0,0792.
Természetesen ez megegyezik a P(K|M)*P(M) valószínűséggel, de a P(K|M) értéket (még) nem ismerjük.

Azon családok közül, akiknek macskájuk van, hány százaléknak van kutyája IS?

Most a kérdés P(K|M), ami pedig a feltételes valószínűség definíciója szerint

$$P(K|M) = \frac{P(MK)}{P(M)}\left(=\frac{P(KM)}{P(M)}\right)=\frac{P(M\,|\,K)P(K)}{P(M)}=\frac{022*0,36}{0,3} = 0,264.$$

Ellenőrizzük le az előző állítást, miszerint P(KM) = P(M|K)*P(K) = P(K|M)*P(M) !
P(M|K)*P(K)-t kiszámoltuk, hogy 0,0792.
P(K|M)*P(M) = 0,264*0,3 = 0,0792, vagyis az előző megállapításunk igaz volt.

3. példa

A hallgatók 30%-a A csoportot, 45%-a B csoportot, a többiek pedig C csoportot írnak a vizsgán. Az A csoportot írók 60%-a, a B csoportot írók 80%-a, a C csoportot írók 25%-a lány.

Tudjuk:
P(A) = 0,3; P(B) = 0,45; P(C) = 0,25; P(L|A) = 0,6; P(L|B) = 0,8; P(L|C) = 0,25.

Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy tetszőlegesen kiválasztott hallgató lány?

Teljes valószínűség tétele:
P(L) = P(L|A)P(A) + P(L|B)P(B) + P(L|C)P(C) =
= 0,3*0,6 + 0,45*0,8 + 0,25*0,25 = 0,6025

Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy tetszőlegesen kiválasztott hallgató C csoportot ír, feltéve, hogy lány?

Bayes-tétel:

$$P(C|L) = \frac{P(LC)}{P(L)} = \frac{0,25 * 0,25}{0,6025} = 0,1037$$

**<u>Várható érték:</u>**
Az egyes események valószínűségét beszorozzuk a valószínűségi változó hozzájuk rendelt értékével és ezeket összeadjuk.

<u>4. példa</u>
Tételezzük fel, hogy az ötös lottón a kettes, hármas, négyes és ötös találat rendre 1 750, 6 500, 725 000 és 2 000 000 000 Ft nyereményt fizet. 225 Ft-os szelvényenkénti árral számolva, egy szelvénnyel fogadva mennyi a nyereségünk várható értéke?

Az egyes találatok valószínűsége:

$$P_0 = \frac{\binom{5}{0}\binom{85}{5}}{\binom{90}{5}} = 0,746; \quad P_1 = \frac{\binom{5}{1}\binom{85}{4}}{\binom{90}{5}} = 0,23; \quad P_2 = \frac{\binom{5}{2}\binom{85}{3}}{\binom{90}{5}} = 0,00225;$$

$$P_3 = \frac{\binom{5}{3}\binom{85}{2}}{\binom{90}{5}} = 8,12*10^{-4}; \; P_4 = \frac{\binom{5}{4}\binom{85}{1}}{\binom{90}{5}} = 9,67*10^{-6}; \; P_5 = \frac{\binom{5}{5}\binom{85}{0}}{\binom{90}{5}} = 2,275*10^{-8}$$

A nyeremény várható értéke:

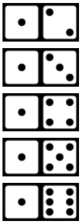
$P_0*0 + P_1*0 + P_2*1750 + P_3*6500 + P_4*725000 + P_5*2*10^9 = 97,127$

A nyereség várható értéke: 97,127 – 225 = –127,87 Ft

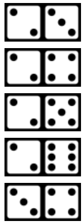
5. példa

András és Béla a következőt játsszák. Mindketten feldobnak egy dobókockát, majd András annyi forintot kap Bélától, amennyi a két kockán lévő pontok különbségének a négyzete, Béla pedig annyit kap Andrástól, amennyi a két kockán lévő pontok összege. Melyiküknek kedvez a játék?

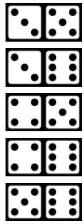
Nézzük meg először András szemszögéből a játékot: legyen $\xi$ a két kockán levő pontok különbségének négyzete. Ez azonos pontérték esetén 0.



$(2–1)^2=$**1**,
$(3–1)^2=$**4**,
$(4–1)^2=$**9**,
$(5–1)^2=$**16**,
$(6–1)^2=$**25**,



$(3–2)^2=$**1**,
$(4–2)^2=$**4**,
$(5–2)^2=$**9**,
$(6–2)^2=$**16**,
$(4–3)^2=$**1**,

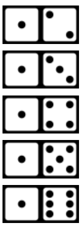


$(5–3)^2=$**4**,
$(6–3)^2=$**9**,
$(5–4)^2=$**1**,
$(6–4)^2=$**4** és
$(6–5)^2=$**1**.

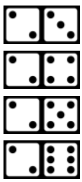
Mivel egy kockával egy adott szám kidobásának valószínűsége 1/6, ezért minden elemi esemény valószínűsége 1/6*1/6 = 1/36. A fenti értékek természetesen úgy is kijöhetnek, ha a két kockát felcseréljük, vagyis a két számérték különbségének négyzete nem csak a fenti 5 esetben lehet „1”, hanem 10 esetben, ezért valószínűsége 10/36. Hasonlóan „4” is 8-féleképpen jöhet ki, „9” 6-féleképpen, „16” 4-féleképpen és „25” 2-féleképpen, valószínűségük 8/36, 6/36, 4/36 és 2/36.

Az egyes számértékeket a valószínűségükkel beszorozva és a szorzatokat összeadva kapjuk meg a várható értéket:
1*10/36 + 4*8/36 + 9*6/36 + 16*4/36 + 25*2/36 = 210/36 = **5,83**

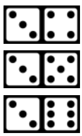
Nézzük most Béla szemszögéből a játékot: legyen $\eta$ a két kockán lévő pontok összege.



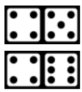
3
4
5
6
7



5
6
7
8

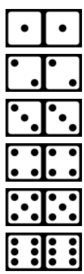


7
8
9



9
10

11



2
4
6
8
10
12

Amikor a két kockán különböző szám van, az fordított sorrendben is kijöhet, vagyis a valószínűséget 2-vel szorozni kell, de a szimmetrikus elrendeződés csak egyféleképpen.
Mivel szintén 1/36 az egyes eredmények valószínűsége, ismét 1/36-dal szorozva kell az értékeket összeadni.
2*(3+4+5+6+7+5+6+7+8+7+8+9+9+10+11)/36 + (2+4+6+8+10+12)/36=
= 252/36 = **7**

Tehát hosszú távon Béla jobban jár.

## <u>Normális eloszlás</u>

Az F(x) eloszlásfüggvény adott t helyen felvett F(t) értéke annak a valószínűségét adja meg, hogy mekkora valószínűséggel vesz fel a valószínűségi változó t-nél kisebb értéket.
Hasonlóan az f(x) sűrűségfüggvénynek, mely F(x) deriváltja, a $-\infty$-től t-ig vett határozott integrálja is annak a valószínűségét adja meg, hogy mekkora valószínűséggel vesz fel a valószínűségi változó t-nél kisebb értéket.
Ha pl. egy $\mu$ várható értékű és $\sigma$ szórású normális eloszlású valószínűségi változó esetén azt akarjuk tudni, hogy mekkora valószínűséggel vesz fel a valószínűségi változó adott t értéknél nagyobb értéket, akkor az $1-F(t)$ érték adja ezt meg.
F(x) értékének meghatározásához érdemes áttérni a $\mu=0$ várható értékű, $\sigma=1$ szórású $\Phi$ *standard normális eloszlásfüggvény*re, melynek adatai táblázatolva elérhetők.

$$F(t)=\Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right).$$

$$\Phi(-t)=1-\Phi(t)$$

<u>6. példa</u>
Egy automata gép által gyártott alkatrészek átmérője normális eloszlású valószínűségi változó, várható értéke 8 mm, szórása 0,1 mm. Az alkatrész nem alkalmazható, ha átmérője a várható értékétől 4%-kal eltér. Mekkora a hibás alkatrészgyártás valószínűsége?

A $\xi$ normális eloszlású valószínűségi változó jelentse az átmérőt. Ekkor a várható érték $\mu=8$, a szórás $\sigma=0{,}1$, és a 4%-os eltérés: 0,04*8=0,32. Ezekkel az adatokkal $P(|\xi-8|>0{,}32) = 1-P(7{,}68<\xi<8{,}32) = 1-(F(8{,}32)-F(7{,}68)) =$
$= 1-(\Phi((8{,}32-8)/0{,}1)-\Phi((7{,}68-8)/0{,}1)) = 1-(\Phi(3{,}2)-\Phi(-3{,}2)) =$
$= 1-\Phi(3{,}2)+\Phi(-3{,}2) = 1-\Phi(3{,}2)+1-\Phi(3{,}2)) = 2-2\Phi(3{,}2) = 0{,}00138 = 0{,}138\%$

7. példa

Statisztikai adatokból megállapították, hogy a 17 éves fiúk magassága centiméterekben mérve normális eloszlású valószínűségi változó, melynek várható értéke 172 cm, szórása 6 cm.
Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy kiválasztott fiú 180 cm-nél magasabb (vagy pont annyi)?

Tudjuk: $\mu = 172$, $\sigma = 6$; és legyen $\xi$ a valószínűségi változó.

Annak a valószínűsége, hogy 180 cm-nél alacsonyabb (ezt tudjuk egyszerűen meghatározni az F(x) függvényből):

$$P(\xi<180) = F(180) = \Phi\left(\frac{180-172}{6}\right) = \Phi(1,33) = 0,9082$$

Ha valaki nem alacsonyabb 180 cm-nél, akkor magasabb (vagy pont annyi), azaz
$P(\xi\geq180) = 1 - P(\xi<180) = 1 - 0,9082 = 0,0918 = 9,18\%$

8. példa

A kompakt fénycsövek élettartama normális eloszlású, 10 000 óra várható értékkel és 2500 óra szórással. Mennyi a valószínűsége, hogy egy újonnan vásárolt égő egy éven belül ég ki, ha folyamatosan fel van kapcsolva?

Tudjuk: $\mu = 10000$, $\sigma = 2500$; és legyen $\xi$ a valószínűségi változó.

$$P(\xi<365*24) = F(8760) = \Phi\left(\frac{8760-10000}{2500}\right) = \Phi(-0,496) = 1 - \Phi(0,496) =$$
$$= 1 - 0,6915 = 0,3085 = 30,85\%$$

**Csebisev-egyenlőtlenség**

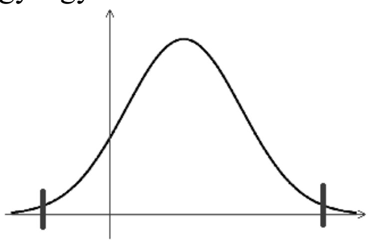
Legyen ξ tetszőleges valószínűségi változó M(ξ) várható értékkel és D(ξ) szórással. Ekkor minden ε>0 számra igaz, hogy

$P(|\xi - M(\xi)| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{D(\xi)^2}{\varepsilon^2}$, azaz a várható értéktől ε-nál nagyobb értékkel való eltérés valószínűsége kisebb, mint a szórás és az ε eltérés hányadosának a négyzete.

9. példa

Egy újságárus óránként átlagosan 64 újságot ad el, 8-as szórással.

Legfeljebb mennyi annak valószínűsége, hogy egy órában 200-nál több újságot ad el?



Legyen ξ valószínűségi változó az eladott újságok száma!

Tudjuk: M(ξ) = 64, D(ξ) = 8; ε = 200 – 64 = 136

$P(|\xi - 64| \geq 136) \leq \dfrac{8^2}{136^2} = 0{,}00346$

Bár ez egy korrekt felső becslés, ebben benne van a „–136 darabnál kevesebb" eladott újság is, vagyis kettővel leosztva az eredményt reálisabb felső becslést kapunk: 0,173%.

Mennyi annak valószínűsége, hogy egy órában több mint 50, de kevesebb mint 78 újságot ad el?

Tudjuk: M(ξ) = 64, D(ξ) = 8; ε = 64–50 = 64–78 = 14

$P(|\xi - 64| \leq 14) = 1 - P(|\xi - 172| \geq 14)$

$P(|\xi - 64| \geq 14) \leq \dfrac{8^2}{14^2} = 0{,}33$

$1 - P(|\xi - 64| \geq 14) = 0{,}67 = 67\%$